CONCURSUL DE MATEMATICĂ ŢIŢEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A VIII-a

Problema 1. Determinaţi numerele reale x ştiind că $\frac{n}{3n+1} < x < \frac{4n+1}{2n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{n}{3n+1} < x < \frac{4n+1}{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*\}$. Deoarece $\frac{n}{3n+1} < \frac{1}{3} < 2 < \frac{4n+1}{2n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $\left[\frac{1}{3}, 2\right] \subset A$.

Vom demonstra că are loc si incluziunea inversă.

Presupunem contrariul, anume că există $a > 0$, $a \in A \setminus \left[\frac{1}{3}, 2\right]$.

Atunci $a \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ sau $a \in (2, \infty)$.

În primul caz, din $\frac{n}{3n+1} < a, \forall n \in \mathbb{N}^*$ rezultă $n(1-3a) < a$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi cum $1 - 3a > 0$, deducem că

$$n < \frac{a}{1-3a}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

inegalitate care este falsă de exemplu pentru $n = \left[\frac{a}{1-3a}\right] + 1$, contradicţie.

Similar, în al doilea caz rezultă $a < \frac{4n+1}{2n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. De aici deducem inegalitatea $n(2a-4) < a+1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $2a - 4 > 0$, avem că

$$n < \frac{a+1}{2a-4}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

inegalitate falsă pentru $n = \left[\frac{a+1}{2a-4}\right] + 1$, de unde rezultă contradicţia.

Aşadar, $A = \left[\frac{1}{3}, 2\right]$. □

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 2. Fie $k \geq 2$ un număr natural şi $x_1, x_2, \ldots, x_k \in (0,1)$ numere reale. De asemnea, fie $m_1, m_2, \ldots, m_k$, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ numere întregi. Definim

$$A = x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{m_k}, \; B = x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$$

şi

$$\begin{aligned} C &= x_1^{\min(m_1,n_1)} \cdot x_2^{\min(m_2,n_2)} \cdot \ldots \cdot x_k^{\min(m_k,n_k)} \\ D &= x_1^{\max(m_1,n_1)} \cdot x_2^{\max(m_2,n_2)} \cdot \ldots \cdot x_k^{\max(m_k,n_k)}. \end{aligned}$$

Să se demonstreze că

$$A + B \leq C + D.$$

Când are loc egalitatea?

Dorel Miheţ

Soluţie. Deoarece $x + y = \min(x,y) + \max(x,y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea $A \cdot B = C \cdot D$. Aşadar trebuie să demonstrăm că

$$A + B \leq C + \frac{AB}{C}$$

inegalitate echivalentă cu $C^2 - C(A+B) + AB \geq 0$, adică cu $(C-A)(C-B) \geq 0$.

Cum $x_i \in (0,1)$ şi $\min(m_i, n_i) \leq m_i, n_i$, avem că $x_i^{\min(m_i,n_i)} \geq x_i^{m_i}$ şi $x_i^{\min(m_i,n_i)} \geq x_i^{n_i}$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Prin înmulţire rezultă că $C \geq A$ şi $C \geq B$.

Egalitatea are loc când $C = A$ sau $C = B$. Egalitatea $C = A$ are loc dacă şi numai dacă $\min(m_i, n_i) = m_i$, adică $m_i \leq n_i$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Similar, $C = B$ are loc dacă şi numai dacă $n_i \leq m_i$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

□

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

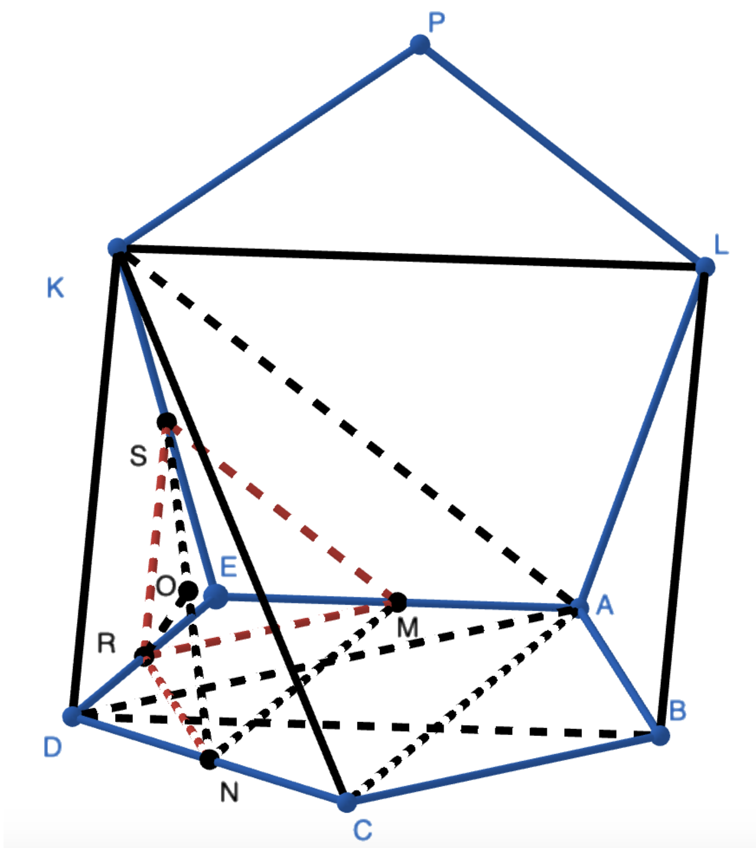
Problema 3. În spațiu sunt date două pentagoane regulate $ABCDE$ și $AEKPL$, astfel încât $\angle DAK = 60^\circ$. Notăm cu M, N şi S mijloacele segmentelor AE, CD şi respectiv EK.

a) Să se arate că triunghiul NMS este dreptunghic.

b) Să se demonstreze că planele (ACK) și (BAL) sunt perpendiculare.

Olimpiadă Ucraina

Soluţie. a) Să observăm că $AK = AD$ şi $\angle DAK = 60^\circ$, deci triunghiul ADK este echilateral.



Avem că $AD = DK$ şi $AE = EK$, de unde D şi E se află în planul mediator segmentului AK, aşadar $DE \perp AK$. Cum $MS \parallel AK$ şi $MN \parallel AC \parallel DE$ rezultă $\angle NMS = 90^\circ$.

b) Să observăm că planele (ACK), (MNS) sunt paralele.

Avem $LK = BD$ şi $LK \parallel AE \parallel BD$, deci $BLKD$ este paralelogram şi $BL \parallel KD$.

Fie R mijlocul segmentului DE. Acum $RS \parallel KD \parallel BL$ şi $RN \parallel CE \parallel AB$, de unde rezultă că planele (ABL) şi (RNS) sunt paralele.

Deci este suficient să arătăm că (MNS) şi (RNS) sunt perpendiculare.

Fie O proieţia lui R pe planul (NMS). Cum $NR = \frac{CE}{2} = \frac{AD}{2}$, $MR = \frac{AD}{2}$ şi $RS = \frac{KD}{2} = \frac{AD}{2}$, rezultă că $OS = ON = OM$, deci O este centrul cercului circumscris triunghiului NMS. Cum triunghiul NMS este dreptunghic, O este mijlocul segmentului SN. Planul (RNS) conţine dreapta RO, perpendiculară pe planul (NMS), deci $(MNS) \perp (RNS)$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 4. a) Să se arate că oricare ar fi numerele naturale nenule a, b, c există un număr natural nenul N astfel încât

$$\left(N+a^2\right)\left(N+b^2\right)\left(N+c^2\right)$$

este pătrat perfect.

b) Arătaţi că există cinci numere naturale nenule distincte a, b, c, d, e pentru care există un număr natural nenul N astfel încât

$$\left(N+a^2\right)\left(N+b^2\right)\left(N+c^2\right)\left(N+d^2\right)\left(N+e^2\right)$$

să fie pătrat perfect.

Luminiţa Popescu

Soluţie. a) Se verifică imediat că $N = ab+bc+ca$ satisface condiţia. Într-adevăr, pentru $N = ab+bc+ca$ avem

$$\left(N+a^2\right)\left(N+b^2\right)\left(N+c^2\right) = [(a+b)(b+c)(c+a)]^2.$$

b) Căutăm N astfel încât $N+d^2 = x^2$ şi $N+e^2 = y^2$, unde $x, y \in \mathbb{N}$. Cu alte cuvinte,

$$x^2 - d^2 = y^2 - e^2 \Longleftrightarrow x^2 + e^2 = y^2 + d^2.$$

De exemplu, $125 = 2^2 + 11^2 = 5^2 + 10^2$, ceea ce este echivalent cu

$$10^2 - 2^2 = 11^2 - 5^2 = 96.$$

Deci, $N = 96$, iar $d = 2, e = 5$. Căutăm acum a, b, c astfel încât $ab+bc+ca = 96$. Încercăm mai întâi $c = 1$ şi obţinem:

$$ab + a + b = 96 \Longrightarrow (a+1)(b+1) = 97$$

Din păcate, 97 este număr prim, deci unul dintre numerele a şi b este egal cu 0, ceea ce nu convine.

Cum $d = 2, c = 2$ nu convine, astfel că încercăm $c = 3$.

$$ab + 3a + 3b = 96 \Longrightarrow (a+3)(b+3) = 105$$

O soluţie ar fi $a = 4, b = 12$. Am găsit numerele a, b, c, d, e ca fiind $2, 3, 4, 5, 12$ şi $N = 96$. Se poate verifica uşor că:

$$\left(96+2^2\right)\left(96+3^2\right)\left(96+4^2\right)\left(96+5^2\right)\left(96+12^2\right) = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2$$

Alternativ, se poate căuta mai sus N astfel încât $N+d^2=t\cdot x^2$ şi $N+e^2=t\cdot y^2$, pentru numere naturale t, x, y. De aici deducem că:

$$t\left(x^2-y^2\right)=d^2-e^2 \Longleftrightarrow t(x-y)(x+y)=(d-e)(d+e)$$

Putem alege $t=d-e, x-y=1, x+y=d+e$ şi obţinem:

$$x=\frac{d+e+1}{2}, y=\frac{d+e-1}{2}, N=(d-e)\left(\frac{d+e+1}{2}\right)^2-d^2.$$

Pentru a uşura calculul alegem $d=e+3$, deci $x=e+2, y=e+1$ şi $N=2e^2+6e+3$. Acum căutăm ca mai sus a, b, c astfel încât

$$ab+bc+ca=2e^2+6e+3$$

Pentru $c=1$ obţinem $(a+1)(b+1)=2(e+1)(e+2)$. Putem alege $a=e+1$ şi $b=2e+1$.

Am găsit numerele a, b, c, d, e ca fiind $1, e, e+1, e+3, 2e+1$ (unde $e>3$) şi $N=2e^2+6e+3$.

Verificăm că:

$$\begin{aligned}
N+1^2 &= 2e^2+6e+4=2(e+1)(e+2) \\
N+e^2 &= 3e^2+6e+3=3(e+1)^2 \\
N+(e+1)^2 &= 3e^2+8e+4=(e+2)(3e+2) \\
N+(e+3)^2 &= 3e^2+12e+12=3(e+2)^2 \\
N+(2e+1)^2 &= 6e^2+10e+4=2(e+1)(3e+2)
\end{aligned}$$

$\square$