CONCURSUL DE MATEMATICĂ ŢIŢEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A XI-A

Problema 1. Să se determine toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisfac egalitatea

$$f(x+y) = f(x+f(y)),$$

pentru toţi $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Fie $n \geq 2$ și fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$$\{\mathrm{rang}(A^k) \mid k \geq 1\} = \{\mathrm{rang}(B^k) \mid k \geq 1\}.$$

Arătaţi că $\mathrm{rang}(A^k) = \mathrm{rang}(B^k)$, pentru orice $k \geq 1$.

Problema 3. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ șirul de numere reale definit prin $a_0 \geq 0$ și

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n+1},$$

pentru orice $n \geq 0$. Demonstrați că există un număr real $a > 0$ astfel încât:

- Pentru orice $a_0 \geq a$, avem $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$;
- Pentru orice $0 \leq a_0 < a$, avem $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Problema 4. Fie $\mathcal{M}$ o submulţime a mulţimii S_n a permutărilor mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, cu $n \geq 2$, care conţine cel puţin două elemente, astfel încât pentru orice $\sigma, \tau \in \mathcal{M}$ avem că $\sigma\tau \in \mathcal{M}$. Se consideră o funcţie $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisface inegalitatea:

$$|f(\sigma\tau) - f(\sigma) - f(\tau)| \leq 1, \forall \sigma, \tau \in \mathcal{M}.$$

Să se demonstreze că:

$$\max_{\sigma,\tau \in \mathcal{M}} |f(\sigma) - f(\tau)| \leq 2 - \frac{2}{|\mathcal{M}|},$$

unde $|\mathcal{M}|$ denotă cardinalul mulţimii $\mathcal{M}$.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.