CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A VII-a

Problema 1. Găsiţi toate tripletele de numere naturale (a, b, c), care satisfac simultan condiţiile

- $1 \leq a < b < c \leq 100$,
- b este media geometrică a lui a si c,
- $\{\sqrt{b}\}$ este media aritmetică a lui $\{\sqrt{a}\}$ şi $\{\sqrt{c}\}$.

(Prin $\{x\}$ se notează partea fracţionară a lui x.)

Soluţie. Din relaţia $\{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{c}\} = 2\{\sqrt{b}\}$ rezultă

$$\sqrt{a} - [\sqrt{a}] + \sqrt{c} - [\sqrt{c}] = 2(\sqrt{b} - [\sqrt{b}]) \iff \sqrt{a} + \sqrt{c} = 2\sqrt{b} + [\sqrt{a}] + [\sqrt{c}] - 2[\sqrt{b}].$$

Dacă $k := [\sqrt{a}] + [\sqrt{c}] - 2[\sqrt{b}] \neq 0$, atunci, prin ridicarea la pătrat a ultimei egalităţi, deducem că $\sqrt{ac} = 2k\sqrt{b} + n$, unde $n \in \mathbb{Z}$. Cum $b^2 = ac$ şi $k \neq 0$, se obţine că b este un pătrat perfect. Pe de altă parte, dacă $k = 0$, atunci adunând egalităţile $[\sqrt{a}] + [\sqrt{c}] = 2[\sqrt{b}]$ şi $\{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{c}\} = 2\{\sqrt{b}\}$, obţinem că $\sqrt{a} + \sqrt{c} = 2\sqrt{b}$. Prin ridicare la pătrat se deduce că $a + c = 2b$ şi, cum $b^2 = ac$, găsim că $a = b = c$, ceea ce este imposibil.

Din faptul că b este pătrat perfect, rezultă că $\{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{c}\} = 0 \implies \{\sqrt{a}\} = \{\sqrt{c}\} = 0$, deci a şi c sunt si ele pătrate perfecte.

Fie atunci $a = \alpha^2$, $b = \beta^2$, $c = \gamma^2$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$. Prima condiţie este echivalentă cu $1 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 10$, iar a doua cu faptul că $\beta^2 = \alpha\gamma$. Din ultima egalitate se obţine imediat că $\alpha = d \cdot x^2$, $\gamma = d \cdot y^2$, unde d este cel mai mare divizor comun al numerelor α, γ, iar x, y sunt numere naturale.

Din $1 \leq dx^2 < dy^2 \leq 10$ deducem că $1 \leq x < y \leq 3$.

Obţinem următoarele posibilităţi pentru tripletul (d, x, y): $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 2)$. Astfel, pentru (α, β, γ) avem soluţiile: $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 9)$, $(4, 6, 9)$, $(2, 4, 8)$.

În concluzie tripletele care verifică cele trei condiţii sunt:
$(1, 4, 16)$, $(1, 9, 81)$, $(16, 36, 81)$, $(4, 16, 64)$. □

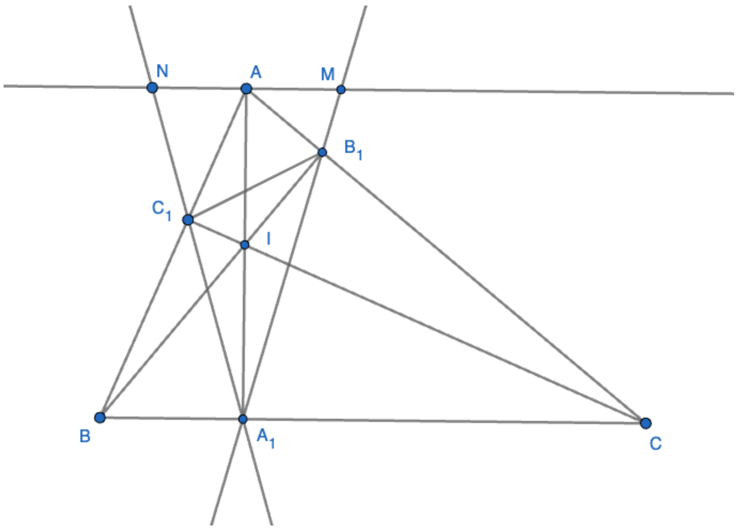
CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 2. În triunghiul ABC, se consideră dreptele concurente AA_1, BB_1, CC_1, unde punctele A_1, B_1, C_1 se află pe segmentele BC, AC, respectiv AB. Să se arate că dacă punctul comun al celor trei drepte AA_1, BB_1, CC_1 este centrul cercului înscris în $\Delta A_1B_1C_1$, atunci acesta este de asemenea ortocentrul ΔABC.

Soluţie. *Varianta 1.*

Este suficient să arătăm că dacă semidreapta A_1A este bisectoarea unghiului $\measuredangle B_1A_1C_1$, atunci AA_1 este înălţimea din A în ΔABC. Construim paralela d prin A la dreapta BC. Dreptele A_1B_1 şi A_1C_1 intersectează dreapta d în M, respectiv N.



Din asemănarea triunghiurilor $\Delta ANC_1 \sim \Delta BA_1C_1$, avem că

$$\frac{AN}{BA_1} = \frac{AC_1}{BC_1}.$$

Analog, din $\Delta AB_1M \sim \Delta CB_1A_1$, avem că

$$\frac{AM}{CA_1} = \frac{AB_1}{CB_1}.$$

Împărţim ultimele două egalităţi şi obţinem:

$$\frac{AN}{BA_1} \cdot \frac{CA_1}{AM} = \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1},$$

deci

$$\frac{AN}{AM} = \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1}.$$

Cum partea dreaptă a ultimei egalităţi este egală cu 1 din teorema lui Ceva, obţinem că $AM = AN$, cu alte cuvinte A_1A este mediană în ΔA_1MN. Dacă AA_1 este bisectoarea unghiului $\measuredangle B_1A_1C_1$, atunci ΔA_1MN este isoscel şi A_1A este şi înălţime în acest triunghi. Astfel, AA_1 este înălţime în ΔABC.

Varianta 2.

Fie I_A, I_B, I_C centrele cercurilor exînscrise în $\Delta A_1B_1C_1$, corespunzătoare vârfurilor A_1, B_1, respectiv C_1. Din faptul că I_A se află pe semidreapta IA, distingem două posibilităţi: fie I_A aparţine segmentului IA, fie nu aparţine. Dacă I_A aparţine segmentului IA şi $I_A \neq A$, atunci, având în vedere că I_A, C_1, I_B sunt coliniare (cele trei puncte se află pe perpendiculara în C_1 pe dreapta CC_1), obţinem că I_B nu aparţine segmentului IB. Argumentând în mod similar, deducem că I_C aparţine segmentului IC, dar $I_C \neq C$, iar apoi că I_A nu aparţine segmentului IA, ceea ce contrazice presupunerea iniţială. Celălalt caz se tratează analog. Am obţinut astfel că $I_A = A$, $I_B = B$, $I_C = C$, adică $AB \perp CC_1$, etc.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ŢIŢEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 3. Dintre toate triunghiurile nedegenerate cu laturi numere naturale și perimetrul 100, determinaţi triunghiul cu aria minimă.

Soluţie. *Varianta 1*

Fie $a \leq b \leq c$ laturile triunghiului cu aria minimă. Conform formulei lui Heron, aria triunghiului este dată de $S = \sqrt{50(50-a)(50-b)(50-c)}$.

Din inegalitatea triunghiului rezulta că, dacă un triunghi are laturi numere întregi şi una dintre ele este egală cu 1, atunci triunghiul trebuie sa fie isoscel. Însă, în cazul nostru, cum $a+b+c = 100$, nu putem avea $a = 1$ si $b = c$. Deducem astfel că $a \geq 2$. Vom demonstra prin reducere la absurd că $a = 2$.

Presupunem prin absurd că $a \geq 3$. Notăn $\alpha = a-1$ şi $\beta = b+1$ şi arătăm că (α, β, c) sunt laturile unui triunghi cu perimetru 100. Observăm că $\alpha < \beta$ şi $\alpha < c$. Dacă $\beta \leq c$ atunci trebuie verificată inegalitatea $\alpha + \beta > c$. Dar, cum $\alpha + \beta = a + b$ si $a + b > c$ (deoarece a, b, c sunt laturile unui triunghi), rezultă că inegalitatea este satisfăcută. Dacă $\beta > c$ trebuie verificată inegalitatea $\alpha+c > \beta$. Deoarece $b+1 = \beta > c$ şi $c \geq b$, rezultă că $b = c$. În acest caz, inegalitatea $\alpha+\beta > c$ devine echivalentă cu $a > 2$, ceea ce este adevărat, deoarece am presupus că $a \geq 3$. În concluzie, (α, β, c) sunt laturile unui triunghi cu perimetrul 100.

Deoarece a, b, c sunt laturile triunghiului de arie minimă, avem că

$$(50-a)(50-b)(50-c) \leq (50-\alpha)(50-\beta)(50-c),$$

care este echivalentă cu

$$(50-a)(50-b) \leq (51-a)(49-b) \Longrightarrow 1+b \leq a.$$

Aceasta contrazice inegalitatea $a \leq b$.

Contradicţia obtinută arată că, într-adevăr, $a = 2$ şi $b + c = 98$. Din inegalitatea triunghiului se deduce imediat că $b = c = 49$.

Varianta 2.

Fie $a \leq b \leq c$ laturile unui triunghi de perimetru 100 cu $a, b, c \in \mathbb{N}$. Vom arăta că

$$(50-a)(50-b)(50-c) \geq 48 = (50-2)(50-49)(50-49),$$

iar egalitatea se realizează doar atunci când $a = 2$, $b = 49$, $c = 49$. Atunci, formula lui Heron va duce la concluzia că triunghiul cu aria minimă are laturile 2, 49 şi 49.

Din $50-a \geq 50-b \geq 50-c > 0$ şi $(50-a)+(50-b)+(50-c) = 50$, deducem că $50-a \geq 17$.

Dacă $(50-b)(50-c) \geq 3$, atunci $(50-a)(50-b)(50-c) \geq 51 > 48$.
Dacă $(50-b)(50-c) \leq 2$, atunci există două posibilităţi:

- $50-b=2$ şi $50-c=1$,
- $50-b=1$ şi $50-c=1$.

În primul caz $50-b=2$, $50-c=1$ şi $50-a=47$, deci $(50-a)(50-b)(50-c)=94>48$.
În al doilea caz $50-b=1$, $50-c=1$ şi $50-a=48$, astfel că $(50-a)(50-b)(50-c)=48$.

Am demonstrat, aşadar, că $(50-a)(50-b)(50-c) \geq 48 = (50-2)(50-49)(50-49)$, iar egalitatea se realizează doar atunci când $50-b=1$, $50-c=1$ şi $50-a=48$, adică atunci când $a=2$, $b=49$, $c=49$. $\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 4. Fie $4n$ puncte în plan, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coliniare, unde $n \geq 1$. Să se arate că mulţimea centrelor de greutate ale triunghiurilor care se pot forma având vârfurile în aceste puncte conţine cel puţin $4n$ elemente.

Radu Bumbăcea

Soluţie. Considerăm mai întâi cazul $n = 1$. Fie punctele A, B, C, D în plan, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coliniare. Cu aceste puncte se pot forma exact patru triunghiuri. Trebuie să arătăm că oricare două dintre aceste triunghiuri au centre de greutate distincte. Presupunem, prin reducere la absurd, că există două triunghiuri care au acelaşi centru de greutate G. Să observăm că cele două triunghiuri au o latură comună, de exemplu AB. Dacă notăm cu M mijlocul segmentului AB, atunci atât C, cât şi D se află pe dreapta MG. În plus, avem relaţia

$$\frac{MG}{GC} = \frac{MG}{GD} = \frac{1}{2} \Longrightarrow GC = GD.$$

Rezultă că $C = D$, ceea ce este o contradicţie.

Trecem acum la cazul general. Fie d o dreaptă în plan care nu este perpendiculară pe nicio dreaptă determinată de două dintre punctele date. O astfel de dreaptă există. Pentru a justifica acest lucru, considerăm un punct arbitrar în plan şi trasăm prin el toate dreptele care sunt perpendiculare pe cel puțin o dreaptă determinată de două dintre punctele date. Numărul acestor drepte este cel mult $2n(4n-1)$. Orice altă dreaptă care trece prin punctul considerat şi este diferită de aceste perpendiculare are proprietatea dorită.

Considerăm acum proiecţiile celor $4n$ puncte pe dreapta d. Datorită modului în care am ales dreapta d, oricare două dintre aceste puncte au proiecţii distincte. Notăm aceste proiecţii cu $P_1, P_2, ..., P_{4n}$, în această ordine, în sensul că fiecare punct P_i se află pe segmentul $P_{i-1}P_{i+1}$ pentru orice $2 \leq i \leq 4n-1$.

Alegem punctele Q_0, Q_1, ..., Q_n pe dreapta d, în această ordine, astfel încât în interiorul fiecărui segment Q_iQ_{i+1} să se afle exact patru dintre punctele $P_1, P_2, ..., P_{4n}$. Pe fiecare dintre punctele Q_i construim drepta ℓ_i, perpendiculară pe drepta d.

Observăm că în fiecare dintre benzile din plan, delimitate de dreptele ℓ_i şi ℓ_{i+1}, se găsesc exact patru dintre cele $4n$ puncte date. Aplicând demonstraţia de la cazul $n = 1$, fiecare astfel de grup de patru puncte determină patru centre de greutate distincte , iar acestea se află în banda din care fac parte cele patru puncte. Prin urmare, în fiecare bandă avem câte patru centre de greutate distincte, iar având n benzi, obţinem astfel cel puţin $4n$ centre de greutate distincte.

$\square$