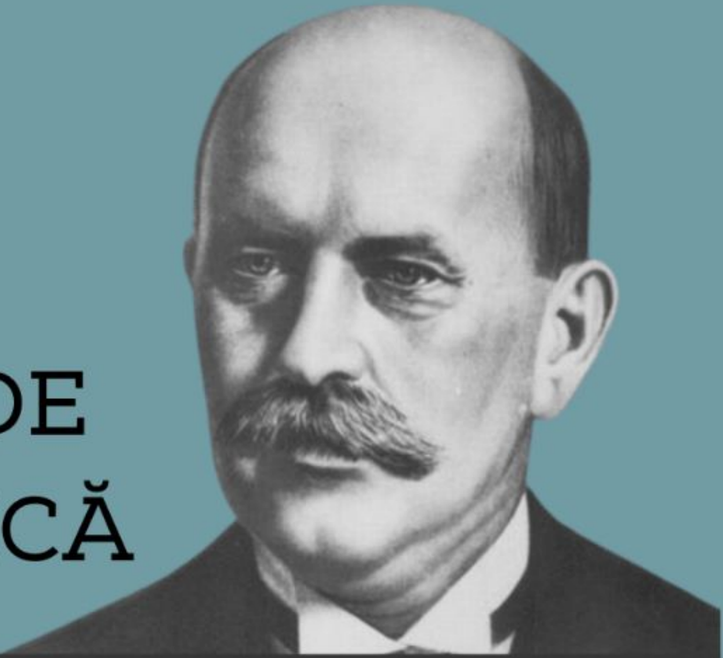
COLEGIUL NAȚIONAL „CAROL I" CRAIOVA
fondat în 1826
TRADIȚIE EDUCAȚIE PERFORMANȚĂ



REVISTA DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

ANUL ȘCOLAR 2022-2023

Colegiul Național „Carol I”

Craiova

Revista de matematică

ȚIȚEICA

NR. 1-2

2022-2023

NR. 1-2

2022-2023

ISSN 1841-3366

CUVÂNT ÎNAINTE

În acest al 197-lea suntem încântați să vă prezentăm o nouă colecție de articole și probleme matematice menite să vă provoace gândirea, să vă încurajeze creativitatea și să vă dezvolte abilitățile în domeniul matematicii, toate adunate în noul număr al revistei de matematică „Țițeica”.

În acest număr, veți găsi articole științifice, probleme interesante, rezolvări ingenioase și tehnici de gândire matematică care să vă dezvolte abilitățile de rezolvare a acestora. Acestea sunt rezultatul muncii elevilor și profesorilor colegiului nostru care s-au implicat activ în realizarea materialelor prezentate.

Această colaborare elevi-profesori s-a concretizat şi în obținerea unor rezultate deosebite la Olimpiada de matematică din acest an la etapa națională: o mențiune, Radu Grigorie; două medalii de argint, Radu Grigorie şi Alexandra Vîrtosu; trei medalii de bronz Bogdan Bucătaru, Rareş Ciobanu, Ana Teodora Grigorie. La faza județeană a aceleiași competiții elevii noştri au obținut 19 premii şi mențiuni sub îndrumarea profesorilor lor Luminița Popescu, Cătălin Spiridon, Gabriel Tica, Raluca Ciurcea.

Aceste rezultate reprezintă o mărturie a angajamentului nostru colectiv față de excelență și a dedicării în a dezvolta potențialul matematic al elevilor noștri. Premiile obținute reprezintă o performanță remarcabilă, demonstrând abilități solide de rezolvare a problemelor și o înțelegere profundă a conceptelor şi un efort susținut în fața provocărilor matematice.

Rezultatele din acest an ne motivează să continuăm să susținem și să încurajăm excelența matematică în cadrul școlii noastre. Vom continua să oferim o educație de calitate, să sprijinim participarea la concursuri și să dezvoltăm abilitățile matematice ale elevilor noștri prin activități și proiecte speciale.

Din partea conducerii **Colegiului Național „Carol I” Craiova** felicitări tuturor elevilor implicați și le mulțumim pentru dedicarea și pasiunea lor pentru matematică. Rezultatele lor impresionante ne inspiră și ne motivează să continuăm să căutăm excelența în domeniul matematicii."

Craiova
20 mai 2022

Director
al Colegiului Naţional „Carol I” Craiova
Prof. Dănuţ MIC

Un strălucit absolvent al Colegiului Național „Carol I” din Craiova: Gheorghe Țițeica, întemeietor al școlii românești de geometrie

Prof. Valentin Bălutoiu,
C. N. „Carol I” Craiova

O veche fotografie[1] înfățișează un om de peste 60 de ani. Ni se arată privirea pătrunzătoare a unor ochi umbriți care săgetează un orizont îndepărtat. Fruntea înaltă, marcă a unei inteligențe superioare, se prelungește într-o calviție ce cuprinde aproape întreg capul: părul întunecat se păstrează numai într-o zonă restrânsă deasupra urechilor și cefei. Lipsa părului este compensată de o mustață impresionantă care ascunde buza superioară. Bărbia se înalță deasupra gâtului ce poartă urmele vârstei...

Este una dintre ultimele imagini ale lui *Gheorghe Țițeica* (1873-1939), făcută doar cu câteva luni înaintea dispariției sale ce a avut loc în februarie 1939.

Originile. Cine se putea gândi la ce destin extraordinar va avea micuțul care a văzut lumina zilei la Turnu Severin în ziua de 4 octombrie 1873? Părinții săi erau oameni modești, originari din zona Buzăului, dar care s-au stabilit în orașul de pe Dunăre, aflat în plină dezvoltare în anii de început ai domniei lui Carol I. Probabil, părinții micuțului Gheorghe (mecanicul de vapor *Radu Țiței*[2] și soția sa, *Stanca Ciolănescu*) nu-și puteau închipui că vor da viață unui copil atât de talentat! Căci, în timpul școlii, pe care a urmat-o la Severin, fiul cel mare al familiei Țițeica (care se va mări cu încă trei fete) a avut rezultate foarte bune. În special la matematică se vădeau darurile excepționale ale copilului! Și unde-și putea continua studiile acest tânăr atât de promițător, dacă nu în locașul de învățământ cel mai prestigios din zona Olteniei, anume Liceul „Carol I”, pe care l-a urmat în perioada 1885-1892?

Elev la Liceul „Carol I”. În vremea aceea, fosta *Școală Centrală* (devenită în 1885 *Liceul Carol I*) cunoștea o perioadă de mare înflorire, prin activitatea unor eminenți profesori care îndrumau viitoare personalități de excepție ale științei și culturii românești. Deja urmaseră cursurile faimoase școli viitorii academicieni *Sabba Ștefănescu*, *Ludovic Mrazec*, *Constantin Rădulescu-Motru* și mulți alții. E posibil ca elevul Gheorghe Țițeica să-i fi cunoscut pe unii dintre ei, de exemplu pe colegul său mai mare, *Nicolae Vasilescu-Karpen*, strălucitul inginer de mai târziu, viitor prim rector al Politehnicii din București.

La Craiova tânărul licean Gheorghe Țițeica a răsplătit din plin așteptările. Sub îndrumarea profesorului *Scarlat Mateescu*, la orele de matematică era strălucit. Ca un adevărat intelectual în devenire se remarca și în alte activități: era pasionat de vioară, scria articole de critică literară și filosofie în revista școlii. Ca să nu mai vorbim de faptul că publica, în aceeași revistă, articole de matematică. Constatând multitudinea preocupărilor tânărului Țițeica, nu putem să nu ne amintim de episodul în care un alt strălucit viitor absolvent, marele inginer și inventator Gogu Constantinescu, care excela în științele exacte și vădea talente strălucite inginerești, era îndemnat de tatăl său, distins

---

1 https://ro.wikipedia.org/wiki/Gheorghe_%C8%9Ai%C8%9Beica#/media/Fi%C8%99ier:Gheorghe_%C8%9Ai%C8%9Beica.jpg

2 Despre numele „Țițeica”, pornind de la numele tatălui „Țiței”: Neamțu-Rizea, Cristina, Rizea, Marian, *Gheorghe Țițeica – Strămoșii, viața și urmașii (1)*, https://www.art-emis.ro/personalitati/gheorghe-titeica-stramosii-viata-si-urmasii-1, accesat la 9 mai 2023

profesor de matematică și director adjunct al Liceului „Carol I”: „Gogule, n-ai să ajungi nici sacagiu dacă nu-ți însușești cultua generală!”[3]

În acei ani efervescenți, decisivi pentru formarea sa ca om de știință și ca om în general, ni-l putem închipui pe elevul Gheorghe Țițeica drept un tânăr activ, sociabil, angrenat în activitățile colegilor săi, un om plin de viață. Părinții elevului Gheorghe Țițeica de la Carol făceau mari sacrificii ca să-l țină în școală pe fiul lor. Dar și acesta i-a ajutat în efortul lor, prin obținerea unei burse pentru rezultatele de excepție la învățătură. Bursa îi asigura o sumă de bani și cazarea gratuită la internatul școlii. Însă viața nu e întotdeauna alcătuită din satisfacții și bucurii: în ultimul an de liceu, tatăl viitorului mare matematician a murit și a lăsat pe umerii fiului mai mare o parte din grija de întreținător al surorilor mai mici. Cum putea obține un tânăr dintr-o familie modestă material sumele necesare ajutorării mamei copleșită de greutăți? Prin meditații pe care Gheorghe le oferea colegilor mai puțin dotați intelectual sau mai puțin dispuși să facă efortul necesar învățării.

Încununarea anilor de instruire ca elev al Liceului „Carol I” a reprezentat-o rezultatul obținut la examenul de bacalaureat, pe care l-a susținut cu brio în anul 1892. Impresia pe care proaspătul absolvent a făcut-o asupra dascălilor săi este dovedită de „recomandarea permanentă” dată de profesorul de matematică, Scarlat Mateescu, în care acesta sublinia că Gheorghe Țițeica a dat dovadă de „o exemplară moralitate” și că a urmat cursurile liceale cu „eminent succes”[4]!

Student eminent la București... Pe baza rezultatelor de excepție din timpul liceului, tânărul Gheorghe Țițeica se înscrie în toamna anului 1892 la *Școala Normală Superioară* din București și la *Facultatea de Științe, Secția de Matematică* a Universității bucureștene. În 1895 a primit licența în matematică. Drumul spre glorie era deschis. Tânărul geniu în matematică putea să-și ia zborul.

... și la Paris! Parisul sfârșitului de secol XIX era capitala artei și a modei, centrul așa numitei „La Belle Époque”. Artiști, precum *Georges Seurat, Paul Signac, Paul Cézanne* sau *Henri de Toulouse-Lautrec*, *Claude Debussy* ori *Maurice Ravel* revoluționau artele plastice și muzica. În aceeași ani frații *Lumière* inițiau arta cinematografică.

Dar Parisul era și un mare centru al științei. Aici *Becquerel* tocmai ce descoperise fenomenul radioactivității, iar soții *Curie* vor continua să cerceteze acest domeniu atât de promițător. În domeniul matematicii activau personalități de excepție, *precum Henri Poincaré, Joseph Valentin Boussinesq, Joseph Bertrand*. Nu-i de mirare deci că, în 1897, Țițeica devine student al prestigioasei *Școli Normale Superioare* din Paris, unde beneficiază de îndrumarea unor faimoși matematicieni, mai cu seamă *Jean Gaston Darboux*. Probabil acest nume provoacă unor elevi... frisoane, pentru că acest savant este autorul *Teoremei* și *Proprietății* lui Darboux, studiată în liceele din România! Darboux a fost o mare personalitate în domeniul matematicii cu contriibuții în domeniile geometriei diferențiale. A elaborat o nouă metodă de rezolvare a integralei Riemann și multe altele. Cert este că, între tânărul venit de pe plaiurile Olteniei și uriașul savant din Paris, s-au născut o încredere și un respect reciproc, fapt care l-a ajutat pe studentul român să aprofundeze cunoștințele de geometrie, marea sa pasiune. Colaborarea dintre cei doi s-a concretizat prin elaborarea unei strălucite lucrări de doctorat în 1899. Gheorghe Țițeica devenea doctor în matematică la Universitatea din Paris, faimoasa *Sorbona*, la doar 26 de ani! În același timp, în mediul efervescent din capitala Franței, tânărul matematician român și-a îmbogățit mult universul cultural, element extrem de important în efortul permanent de perfecționare care l-a urmărit în întreaga sa viață.

Cei câtiva ani petrecuți la Paris au avut și o altă urmare neașteptată asupra vieții tânărului matematician. Astfel, aici a cunoscut-o pe *Florence Thierin* (1882-1965), cu care se va căsători.

Profesor universitar la București! Deși avea posibilitatea de a-și croi o strălucită carieră în Occident, proaspătul doctor în matematică a revenit în țară, devenind profesor al Universității din București. În această calitate, activitatea sa a urmat următoarele direcții:

[3] https://www.youtube.com/watch?v=EsAkmHoCd1E, accesat la 12 mai 2023.

[4] Neamțu-Rizea, Cristina, Rizea, Marian, op. cit.

- **Cercetarea**, în care s-a remarcat prin contribuții fundamentale. Este considerat primul matematician român a cărui operă a intrat în circuitul ştiinţific internaţional. Este întemeietorul şcolii româneşti de geometrie. Astfel, „A definit o nouă clasă de suprafeţei şi o nouă clasă de curbe, cunoscute azi sub numele de „curbele Ţiţeica“, „suprafeţele Ţiţeica“. Este considerat fondatorul geometriei diferenţiale centroafine. Un profesor de excepţie, care a scris multe cărţi de referinţă în geometrie. Iată doar câteva: „Geometrie superioară. Suprafeţe riglate“, 1931, „Geometria diferenţială proiectivă a reţelelor“, 1924.”[5]

„Opera științifică a matematicianului român cuprinde 96 de note şi memorii, majoritatea publicate în cele mai prestigioase reviste din Franța. Academia Română l-a ales încă din 1913 membru activ, iar instituțiile și organizațiile internaționale nu au întârziat să-i ofere numeroase distincţii. La congresele internaționale de matematică din 1924 (Canada), 1932 (Elveţia) şi 1936 (Norvegia), Țițeica a prezidat lucrările secției de geometrie.”[6]

Este autorul faimoasei „probleme a monedei de 5 lei”.[7]

- **Activitatea de profesor**. Și aici a dat dovadă de un talent remarcabil. „Un fost student al său, Nicolae Mihăileanu mărturisea: „Lecțiile lui Țițeica erau de o desăvârșită artă a pedagogiei. La începutul fiecărei ore de curs, el recapitula ideile principale ale lecției anterioare; lecția predată era completă și se încheia cu o privire generală; expunerea era logică, clară, precisă, în stil foarte îngrijit, fără să se folosească de nici o notiță, rezultatele importante erau subliniate prin variația intonației; toate calculele se sprijineau pe o puternică intuiție geometrică”.

„Elevul favorit, Dan Barbilian (poetul Ion Barbu), spunea despre maestrul său: „Am avut curiozitatea să gust, într-o atitudine de așteptare, lecțiile profesorului Ţiţeica. Le-am cunoscut ca pe niște clare bătălii. Sub fața aceasta, mai ales, le iubesc. Însemnătatea acestor lecții nu-ți îngăduie însă o prea lungă pasivitate. Scoți repede hârtia, creionul şi intri în bătălie. Atunci simți lângă tine o mână sigură, de neîntrecut combatant”.”[8]

Este un mare merit al lui Țițeica, deoarece sunt oameni de știință excepționali, care nu sunt capabili să transmită studenților cunoștințele necesare. Le lipsește harul de a fi pedagogi.

Membru al Academiei Române. În 1909, Gheorghe Țițeica a devenit membru corespondent al Academiei Române, iar câțiva ani mai târziu membru titular al prestigioasei instituții (1913). Discursul de recepţie de la Academie exprimă înaltele calităţi morale ale marelui savant român: „De altfel, la noi, omul care-și face datoria cum și-a făcut-o Haret, nu prea place, nu ne e tocmai simpatic. Obicinuiți cum suntem cu deșteptăciunea noastră proverbială, care găsește ușor și mijlocul de abatere de la linia dreaptă și justificare că această lunecare e calea cea bună, nu ne prea place omul rigid, care merge drept, sigur și hotărât ca un mecanism, care vine regulat ca o mașină la îndatoririle sale, care se ține de cuvânt și nu amăgește pe nimeni, în viața căruia farmecul neprevăzutului se reduce la minimum, la care din contră totul e cântărit și socotit. Oamenii cu socoteală sunt prețuiți când nu mai sunt; când îi avem însă nu ne plac, prea ne aduc aminte de felul nostru obicinuit de a lucra, ceea ce nu ne convine, și prea au aerul să susțină că fiecare act al unui individ, oricât de mărunt ar fi el – și actul și individul– atinge într-o oarecare măsură, interesele societății în care trăiește acel individ”[9]

Părinte al Gazetei Matematice. La 15 septembrie 1895 a fost publicat primul număr al revistei *Gazeta Matematică*. Evenimentul a avut loc la o zi după inaugurarea podului de la Cernavodă, construit de Anghel Saligny. Printre profesorii care au contribuit la redactarea revistei s-a numărat şi Gheorghe Țițeica. Gheorghe Țițeica a fost primit în audiență de regele Carol I în 1903 și, cu această ocazie, i-a

---

[5] Neamțu-Rizea, Cristina, Rizea, Marian, op. cit.

[6] https://dosaresecrete.ro/gheorghe-titeica-unul-dintre-fondatorii-gazetei-matematice/?utm_content=cmp-true, accesat la 13 mai 2023.

[7] https://www.geogebra.org/m/xd597jqM, accesat la 13 mai 2023.

[8] https://dosaresecrete.ro/gheorghe-titeica-unul-dintre-fondatorii-gazetei-matematice/?utm_content=cmp-true, accesat la 13 mai 2023.

[9] Dobrescu, Elena, *Gheorghe Țițeica (2)*, în Atitudini, august 2020, https://casadecultura.ro/wp-content/uploads/Atitudini_august-2020.pdf, accesat la 14 mai 2023.

prezentat suveranului volumele apărute în cadrul colecției revistei. Ceea ce este demn de remarcat este faptul că la evoluția revistei și-au adus contribuția, prin materiale publicate de prestigioasa revistă, prin prezența în colegiul de redacție[10], dar și prin încurajarea elevilor să rezolve probleme, distinşi profesori ai Colegiului Național „Carol I” din Craiova.

Așchia nu sare departe de trunchi! Gheorghe Țițeica a avut trei copii*: Radu Țițeica* (1905-1987), *Gabriela Țițeica* (1907-1987) și *Şerban Țițeica* (1908-1985). Urmând tradiția inaugurată de strălucitul lor tată, toți trei au devenit importanţi oameni de știință români.[11]

Astfel, Radu Țițeica s-a remarcat în domeniul fizicii. A redactat, în colaborare, *Lexiconului tehnic român* (în 7 volume Ediția I și 19 volume Ediția a II-a) și *Fizica generală* (în 3 volume).

Gabriela Țițeica, în ciuda unor grave probleme de sănătate, a avut o bogată activitate în cadrul mai multor instituții de învățământ superior din România, până la ieșirea la pensie (1971).

Șerban Țițeica a fost un mare om de știință, membru al Academiei Române (1955), cercetător în diverse ramuri ale fizicii. A impresionat prin cultura sa enciclopedică, fiind iubitor al științelor umaniste și al artelor.

Într-adevăr, prin urmașii săi, Gheorghe Țițeica și-a adus o ultimă contribuție la înflorirea științei și culturii românești.

---

[10] https://ssmr.ro/concurs_GMB_rezultate, accesat la 13 mai 2023.

[11] Neamțu-Rizea, Cristina, Rizea, Marian, *Gheorghe Țițeica – Strămoșii, viața și urmașii (2)*, https://www.art-emis.ro/personalitati/gheorghe-titeica-stramosii-viata-si-urmasii-2, accesat la 14 mai 2023.

INTERVIUL REVISTEI

Am stat de vorbă cu domnul Louis Funar, absolvent al Colegiului Național „Carol I” promoția 1985, medaliat cu Argint la Olimpiada Internațională de Matematică, Helsinki, 1985, cu Aur la Olimpiada Internațională de Matematică, Praga, 1985, medaliat cu Bronz la Olimpiada Internațională de Matematică, Paris, 1983 și premiat cu Premiul I la Olimpiada Balcanică de Matematică, Atena,1984.

Rep.: Pentru început vă rog să ne spuneți câteva lucruri despre dumneavoastră(o scurtă prezentare).

***Louis Funar*:** Născut la Craiova, am fost elev la școala Decebal (nr. 12) până în 1981 și apoi la Colegiul Național Carol (pe atunci Colegiul Nicolae Bălcescu) în perioada 1981-1985. După ce am terminat Facultatea de Matematică de la București în 1990 am fost angajat la Institutul de Matematica al Academiei Romane „Simion Stoilow’’ și am început un doctorat la Universitatea Paris-Sud, Orsay. După obținerea doctoratului în 1994 am obținut un post de cercetător la Institutul Fourier din Grenoble, unde mă aflu și în prezent.

Rep.: *De ce matematica? Când și cum ați realizat că veți studia matematica?*

***Louis Funar*:** Am fost pasionat de rezolvarea enigmelor, de copil. Când am reușit să descifrez primele rezultate de geometrie plană mi s-a părut fascinant ca trei linii drepte precum înălțimile unui triunghi, să fie obligate treacă prin același punct, și anume prin ortocentrul acestuia. Apoi câteva cărți de matematică elementară m-au convins ca este un domeniu deosebit de interesant, care merită să fie aprofundat. Geneza geometriei neeuclidiene, așa cum a fost povestită în cartea Floricăi T. Câmpan, mi-a revelat esența raționamentului matematic și drumul sinuos al descoperirii oscilând permanent între speculație și certitudine.

Rep.: În timpul liceului ați participat la olimpiada de matematică cu rezultate deosebite. Ce v-a motivat să participați la concursurile de matematică și ce v-a determinat să vă continuați eforturile în acest domeniu?

***Louis Funar*:** Am participat la astfel de concursuri încă de la școala generală, probabil impulsionat de profesorul de matematica din gimnaziu, Dl. Florin Voicu. Primele rezultate la olimpiada de matematică au venit fără să fie rezultatul unei pregătiri specifice, iar în clasa a VII-a am ajuns să obțin premiul întâi la faza națională. Am avut apoi șansa să-l întâlnesc pe Dl. Valentin Boju, profesor de geometrie la Universitatea din Craiova, care mi-a pus în mâna câteva cărți fundamentale în calitate de mentor și a devenit ulterior colaborator apropiat. Un an mai târziu faza finala a olimpiadei de matematica s-a ținut la liceul Carol din Craiova, însă clasele V-VIII nu au fost reprezentate. Am fost primit pentru a participa înafara concursului la așa numitele teste de baraj pentru clasele 9-12, care reprezentau selecția pentru lotul lărgit de matematică, unde am avut rezultate onorabile. Am rămas însă cu impresia că aş putea face încă și mai bine, dacă timpul mi-ar permite să mă pregătesc mai temeinic. Tocmai mă întorsesem de la cel ce urma să fie ultimul meu concurs de gimnastica, la Reșița. Am fost obligat să pun în balanța cele două pasiuni ce le aveam la acel moment, și anume sportul și matematica. Renunțând la gimnastica de performanță, care îmi ocupase cea mai mare parte a timpului liber pentru câțiva ani, a fost cât se poate de natural să continui să particip la concursurile de matematică în timpul liceului. Însă începusem să urmez în paralel câteva cursuri la Universitate, în special de geometrie, pentru a avea baze solide pentru ceea ce mă motiva încă și mai mult și anume să descopăr eu însumi câte ceva din minunățiile lumii matematice.

Rep.: Cum vă pregăteați pentru olimpiada de matematică și ce resurse și tehnici foloseați?

Louis Funar: În viața de zi cu zi îmi propuneam să rezolv o problemă, într-una sau mai multe zile în funcție de dificultate, eventual să înțeleg soluția dacă nu reușeam după mai multe încercări. În perioada în care eram în pregătire la lot sau chiar înaintea concursurilor majore activitatea era mai intensă. Însă încercam să citesc, să înțeleg și să discut matematică o mare parte din timpul liber.

Începând cu gimnaziul am fost un cititor și rezolvitor de probleme din Gazeta Matematică.

Înafara manualelor de liceu (excelente) foloseam în mod esențial 4 cărți de probleme în timpul liceului: L.Panaitopol și C.Otescu - Probleme date la Olimpiadele de matematică, 1974, M. Pimsner și S. Popa - Probleme de geometrie elementară, 1979, D. Popescu și G. Oboroceanu - Exerciții și probleme de algebră, combinatorică și teoria numerelor, 1979, Probleme de matematică traduse din revista Kvant, 1983, la care s-a adăugat în ultimul an de liceu și cartea lui I. Cuculescu - Olimpiadele internaționale de matematica ale elevilor, 1984.

Aveam acces la bibliotecile universitare, iar colecțiile American Mathematical Monthly sau Kvant dedicate elevilor și studenților erau surse inepuizabile de probleme și idei.

Între timp am descoperit că matematica este un domeniu foarte activ și că rezultatele matematice noi și interesante sunt publicate sub forma unor articole în reviste de specialitate.

Un articol prezintă rezolvarea unei clase mai largi de probleme, ce au suscitat și interesul altor matematicieni în trecut, si poate dezvolta o întreaga teorie în acest scop.

Rep.: Care sunt cele mai importante premii pe care le-ați obținut și ce v-a ajutat să le obțineți? Cum v-au ajutat acestea?

Louis Funar: Premiile obținute la olimpiadele internaționale de matematica au fost (bronz în 1983 – Paris, aur în 1984 – Praga, argint în 1985 -Helsinki). Am participat și la o balcaniadă (aur în 1984 – Atena).

Unul din concursurile mele preferate a fost „Gheorghe Tițeica”, de nivel regional în anii respectivi, unde existau si probe pe echipe (mixte, adică pentru două clase, de ex. a IX-a și a X-a) și unde problemele erau adesea inspirate din matematica primilor ani de facultate. Importanța concursului era mult mai mică decât cea a olimpiadelor naționale sau internaționale, dar pentru mine a fost una dintre cele mai plăcute și formatoare experiențe; am descoperit astfel avantajele colaborării, cât și plăcerea de a rezolva problemele colectiv.

De altfel am căutat ca participarea la concursurile și taberele de matematică să fie subordonata bucuriei de a face matematică și a petrece zile plăcute într-un cadru agreabil, iar nu ideii de competiție și ierarhizare. Cred astfel că matematica nu poate și nu trebuie să fie considerată un sport.

Consider că participarea la aceste concursuri internaționale nu a avut consecințe serioase în evoluția ulterioară, poate doar să fi adus o mica doză de încredere în sine, ceea ce este întotdeauna binevenită, însă doar cu măsură.

Rep.: Cum au fost anii de liceu? Ce vă lipsește din acea perioadă?

Louis Funar: Cred ca anii de liceu au fost caracterizați de un entuziasm general atât pentru mine cât și marea majoritate a colegilor. Într-o lume gri, trăiam o viață plină dacă nu palpitantă, în primul rând datorită energiei specifice vârstei și a încrederii (în general nejustificate) că vom putea duce la bun sfârșit proiecte ambițioase.

Elanul acesta în scopul unui țel important în viața și ideea că totul este încă posibil, au continuat să mă anime un număr de ani, dar cu timpul au devenit mai raționale. Entuziasmul în fața noilor proiecte alternează cu bucuria liniștită ce se resimte în contemplarea micilor realizări dar mai ales cu perioade de îndoieli și încercări, majoritatea sortite eșecului.

Rep.: În afară de matematică, erau alte și discipline de care ați fost interesat în timpul școlii?

Louis Funar: Am avut atât la clasa cât și pentru pregătirea pentru concursurile de matematică susținerea totală a profesorului de matematică Dl. Virgiliu Schneider, beneficiind și de sfaturile celorlalți profesori de matematică ai liceului, printre care aș aminti pe Dna. Liliana Niculescu și Dna. Iuliana Coravu. Toți trei au fost dascăli de excepție.

Dar liceul „Carol I” a avut profesori extraordinari de la care am învățat cu drag, la toate materiile.

Fizica a fost un punct de interes constant din perioada gimnazială, apoi la liceu, sub îndrumarea Dnei. Viorica Hinoveanu, la facultate și până astăzi. O parte din problemele ce le-am abordat sunt inspirate din lucrările unor fizicieni teoreticieni de excepție precum Edward Witten. Întotdeauna am citit cu plăcere, atât literatură clasică cât și contemporană, românească sau universală. În mod particular, am fost și sunt atașat de istorie, chiar dacă nu neapărat istoria învățată la clasă.

Rep.: Cum a contribuit matematica la formarea dumneavoastră ca persoană?

***Louis Funar*:** Mi-am construit viața din perspectiva cuiva care poate să trăiască exersând doar meseria de matematician. Pentru a putea realiza această dorință, au fost necesare anumite eforturi, însă, în mare parte acestea au trecut neobservate. Este nevoie pe de o parte de spirit de organizare, de atenție, concentrare și de perseverență, dar în același timp de creativitate și de curiozitate.

Rep.: Ce rol credeți că joacă pregătirea matematică în orice alt domeniu?

***Louis Funar*:** Este nevoie de o abordare logică și sistematică în majoritatea activităților de astăzi. După cum spunea Eugene Wigner, „*Eficiența matematicii* este o minune, pe care nici nu o înțelegem și nici nu o merităm”. Problemele de logistică și analiza a riscurilor sunt omniprezente în domenii variate ce țin de economie, comerț sau finanțe. Chiar dacă nu este nevoie de matematică de foarte înalt nivel pentru a face informatică în general, cu excepția criptografiei clasice sau post-cuantice și a cybersecuritatii, o pregătire serioasă este necesară și utilă. Matematica se regăsește la diverse grade de complexitate în telecomunicații, în recunoașterea de imagini, în rețelele neuronale, în funcționarea telefoanelor mobile și arhivarea sau arhivarea fișierelor de date, în funcționarea, organizarea, analizarea datelor, în scopul diagnosticării în multe domenii din sănătate. Ceea ce este mai puțin vizibil este că peste tot, adică de la economie la sănătate, se lucrează cu modele matematice, în mod necesar aproximative, a căror viabilitate depinde esențial de factorul uman. Matematica este așadar un instrument deosebit de precis, însă rezultatul final depinde foarte mult de utilizator. Pregătirea matematică reprezintă un atu în majoritatea domeniilor, mai ales dacă este complementara altor abilități sau calități necesare, cum ar fi creativitatea, empatia, spiritul de sinteză, eficiența, comunicativitatea, carisma, etc.

Rep.: Care sunt cele mai interesante aspecte ale matematicii care vă motivează să continuați să vă dezvoltați în acest domeniu?

***Louis Funar*:** A te simți matematician este o stare de grație care durează foarte puțin. Restul este muncă și ore întregi de gândire, căutări bibliografice, eforturi de a înțelege ce au făcut generații întregi de matematicieni, sute și mii de încercări, de pagini umplute din care multe din ele vor fi aruncate la gunoi și toate acestea pentru a extrage o idee nouă, o metodă, ceva ce nimeni nu a observat până acum.

Bucuria unei realizări este de scurtă durată pentru că fiecare pas pe care-l facem este de fapt doar un mic pas pe calea cunoașterii.

Cercetarea în matematică necesită multă concentrare și un consum nervos substanțial. Este prin urmare esențială reconcilierea a două lumi, cea de toate zilele unde putem acționa în mod efectiv și lumea ideală a obiectelor matematice care este independentă de dorințele noastre căci adevărurile matematice sunt imuabile.

Pentru a face matematică astăzi este nevoie de a avea apetență pentru risc, ordine și rigoare și foarte multă ingeniozitate, imaginatie dar și un pic de noroc. Matematica este descrierea ultimă și ideală a Universului și prin urmare nu este așa cum ne-am dori noi să fie, ci de multe ori surprinzătoare și greu de descifrat.

Micile noastre realizări sunt însă prilej de mare bucurie interioară, precum are drumețul în momentul în care a urcat un vârf de munte. Există și un dram de competiție și dorință de recunoaștere însă nu există o relație universală între valoare și notorietate.

Contemplarea perfecțiunii acestui edificiu imens cu numele generic de matematică nu poate incita pe cercetător decât la modestie. Generații de minți luminate au lucrat la construcția sa și este deopotrivă pasionant și valorizant să poți aduce astăzi chiar și o minimă contribuție.

Astăzi am pe masa câteva proiecte pe care sper să le duc la bun sfârșit și pentru care entuziasmul specific anilor de liceu continuă să se manifeste, chiar dacă într-o formă atenuată.

Rep.: Cum credeți că pot contribui concursurile de matematică la dezvoltarea personală și profesională a unui elev și cum pot ajuta la construirea unui profil academic solid?

***Louis Funar*:** Concursurile ajută în special printr-o abordare mai variată a materiei predate în scoală, care de cele mai multe ori pare anostă, tehnică și prea puțin conectată la realitatea înconjurătoare. Cei ce participă la astfel de concursuri au automat o atracție pentru matematică, implicit o cunoaștere mai amănunțită a acestei discipline, și acest lucru îi va ajuta dacă își doresc să urmeze o carieră legată de știință sau tehnologie. În absența presiunilor din partea celor din jur participarea la concursuri poate avea un rol pozitiv în construcția psihologică a elevilor, îndepărtând de exemplu frica de eșec. Ori eșecul este unul din fundamentele reușitei și oportunitatea de a relua totul de la început.

Nu trebuie însă exagerat aportul concursurilor ca atare și a relevanței ierarhiilor la această vârstă și nivel. Rezultatele la concursuri depind în mare măsură de posibilitatea de a se pregăti intensiv într-un cadru relativ restrâns. Matematica, fizica, chimia, informatica, etc. sunt mult mai mult decât ceea ce se poate aborda într-un astfel de concurs. Un rezultat, fie el și excepțional, la nivel internațional nu este decât o încurajare pentru a merge mai departe, în nici un caz nu este o finalitate. Uneori, astfel de rezultate deschid noi porți și oportunități, adeseori pentru a putea continua într-o universitate prestigioasă. Însă drumul este încă foarte lung. Curiozitatea și pasiunea pot ajuta la construirea unor profile academice la fel de interesante, mai ales dacă acestea sunt îndrumate de către persoane competente.

Rep.: Ce sfaturi aveți pentru elevii care doresc să participe la concursurile de matematică și cum îi încurajați să își dezvolte interesul și abilitățile în domeniu matematicii?

***Louis Funar*:** Primul pas pentru a participa la un concurs este să începi prin a te pregăti. În ziua de astăzi resurse documentare sunt mult mai multe decât necesar, mai ales pe internet, prin urmare este esențial să se facă o selecție și să se avanseze gradual. Mi se pare mai important dezvoltarea unei intuiții și a unei maniere de abordare a problemelor decât asimilarea unor tehnici foarte precise care să permită automatizarea rezolvării. Chiar dacă materia care este la baza subiectelor este bine-cunoscută, variațiile ce pot apare sunt incredibil de multe, și memoria nu le poate reține toate.

Obiectivul principal al participării nu poate fi un premiu și implicit competiția cu ceilalți participanți ci rezolvarea problemelor prezentate, după cum spunea Jean Dieudonné “Pour l’honneur de l’esprit humain”. Până la urmă aceasta este esența vieții spirituale, în care ființa umană este animată de dorința de a se auto-depăși.

Rep.: Care credeţi că ar fi „rețeta succesului”? De ce este nevoie pentru a reuși în viață?

***Louis Funar*:** Succesul este relativ și de scurta durată, iar Reușita este o chestiune ce ține mai degrabă de caracterul fiecăruia și echilibrul personal. Tot ce pot spune este că mi-am dorit întotdeauna o anume libertate, și anume aceea de a putea exersa o meserie ce îți poate da satisfacții de natură intelectuală la orice vârstă, atâta vreme cât o practici cu pasiune. Chiar dacă aceasta viziune asupra vieții profesionale poate părea utopică, acesta este motorul oricărei activități umane neconstrânse.

ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE

O strategie de rezolvare a unor probleme de geometrie

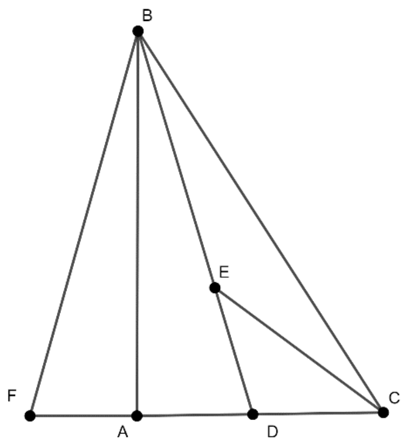
Prof.dr. Luminița Popescu
C.N. „Carol I” Craiova

Aproape toate problemele de geometrie plană întâlnite la olimpiadele de matematică necesită construcții ajutătoare pentru a fi rezolvate. În general, nu este ușor să identifici construcțiile necesare pentru rezolvarea unei probleme. Un tip de construcție ajutătoare foarte utilă este cea care produce „simetrizarea figurii”. Mai precis, prin aceasta înțelegem să ne alegem un punct sau o dreaptă și să construim simetricul figurii noastre în raport cu acestea. De exemplu, de fiecare dată când raționăm pe o figură care conține un triunghi dreptunghic isoscel, este o idee bună să construim pătratul care are una dintre diagonale egală cu ipotenuza acestuia. Practic, ceea ce facem este să ne alegem linia determinată de ipotenuza triunghiului ca axă de simetrie și să construim simetricul triunghiului dreptunghic isoscel față de aceasta. În această notă ne propunem să prezentăm câteva exemple care susțin această strategie de abordare a problemelor de geometrie plană.

La faza națională a olimpiadei de matematica ediția 2023, Problema 4 de la clasa a VI-a a avut următorul enunț:

1. Fie triunghiul ABC cu $\widehat{BAC} = 90°$ și $\widehat{ACB} = 54°$. Construim bisectoarea BD $(D \in AC)$ a unghiului ABC și considerăm punctul E pe segmentul BD astfel încât $DE = DC$. Arătați că $BE = 2 \cdot AD$.

Soluție:



Deoarece $\widehat{BAC} = 90°$ și $\widehat{ACB} = 54°$ obținem $\widehat{ABC} = 36°$ și $\widehat{ABD} = \widehat{CBD} = 18°$.

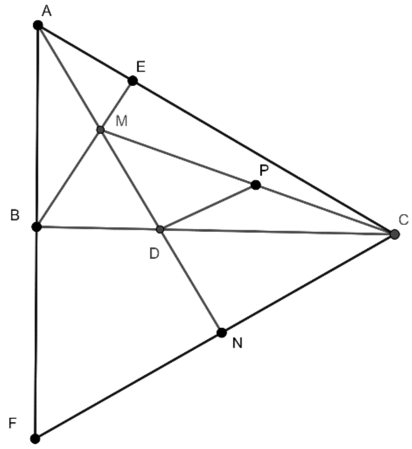
Construind F simetricul lui D fată de A, se obține triunghiul BFD isoscel de bază FD şi $FB = BD$. În aceste condiții $\widehat{FBA} = \widehat{ABD} = \widehat{CBD} = 18°$, iar unghiul $\widehat{FBC} = 54°$. Se obține triunghiul FCB isoscel de bază BC, de unde $FB \equiv FC$. De aici se obține

$2 \cdot AD + DC = FC = FB = BD = BE + ED$ de unde se găseşte $2 \cdot AD = BE$.

La etapa județeană a aceleiași ediții, Problema 4 de la clasa a VII – a a avut următorul enunț:

2. Fie triunghiul ABC care are $\widehat{ABC} = 90^{\circ}$ și $\widehat{BCA} = 30°$. Fie AD bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}, D \in BC$, și $BE \perp AC, E \in AC$. Notăm cu M intersecția dreptelor AD și BE, iar cu P mijlocul lui CM. Arătați că $AC = 4 \cdot DP$.

Soluție:

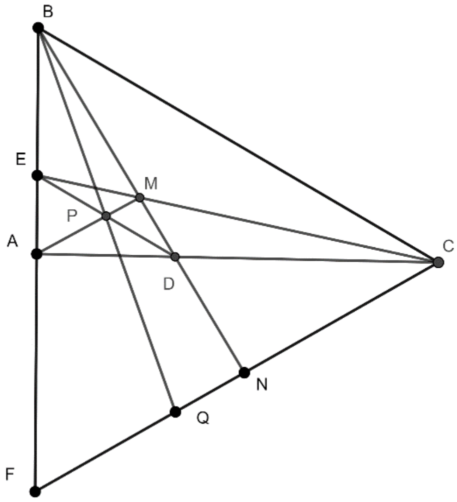


Ne alegem dreapta BC și construim simetricul triunghiului ABC față de aceasta. Dacă F este simetricul lui A fată de $B,$ atunci triunghiul AFC echilateral, iar AN este bisectoare, mediană și înălțime. Se obține așadar $2NC = AC$ și D este centrul de greutate al triunghiului AFC, deci $DN = \frac{AN}{3}$. Deoarece $\widehat{ABM} = \widehat{BAM} = \widehat{MAE} = 30°$ se obține triunghiul MAB isoscel, cu $AM \equiv BM$. Din egalitatea $\widehat{DBM} = \widehat{MDB} = 60°$ se obține triunghiul MBD echilateral, $DM \equiv BM$. Deci $MD = \frac{AD}{2} = \frac{AN}{3} = DN$, astfel că DP este linie mijlocie în triunghiul MNC, de unde obținem că $2DP = NC$ și $AC = 4DP$.

La etapa finală la clasa a VII – a Problema 3 a avut următorul enunț:

3. Se consideră un triunghi ABC care are $\widehat{BAC} = 90°$ și $\widehat{ABC} = 60°$. Luăm punctele D și E pe laturile AC, respectiv AB, astfel încât $CD = 2 \cdot DA$ și DE este bisectoarea unghiului $\widehat{ADB}$. Notăm cu M intersecția dreptelor CE și BD, iar cu P intersecția dreptelor DE și AM. Arătați că:
   a) dreptele AM și BD sunt perpendiculare;
   b) $3 \cdot PB = 2 \cdot CM$.

Soluție:



Alegem axa de simetrie AC și fie F simetricul lui B fată de aceasta. Obținem că triunghiul BFC este echilateral, CA este bisectoare, mediană și înălțime, iar D este centrul de greutate al triunghiului, astfel că $DC = BD = 2AD$. Deci, semidreapta BD este bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$, iar $\widehat{ADE} = \widehat{EDB} = \widehat{ABD} = 30°$ și $2AE = ED = EB(1)$.

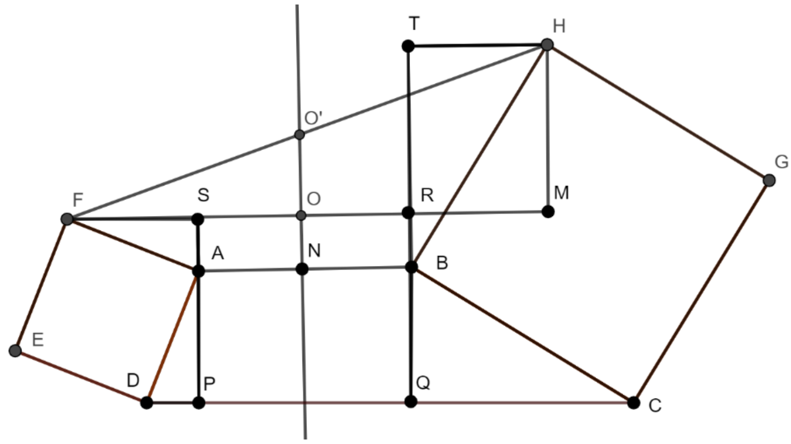
a) Din $\widehat{EDB} = \widehat{DBC} = 30°$ rezultă $ED \parallel BC$ și din asemănarea triunghiurilor EMD și CMB se obține $\frac{MD}{BM} = \frac{EM}{MC} = \frac{ED}{BC} = \frac{1}{3}$ (2). În triunghiul dreptunghic ABD avem $AD^2 = \frac{1}{4}DC^2 = MD \cdot BD$ deci din reciproca teoremei catetei se obține $AM \perp BD$.

b) Din (2) se obține $\frac{4}{3}CM = EC$ (3). Deoarece $FN \perp BN$ şi $AM \perp BD$ se obține $AM \parallel FN$ şi AM linie mijlocie în triunghiul BFN. În plus, avem că P este mijlocul lui BQ, deci $2BP = BQ(4)$.

În triunghiul dreptunghic AMD avem $\widehat{ADM} = 60°$, $\widehat{AMD} = 90°$ deci $\widehat{MAD} = 30° = \widehat{ADP}$ de unde $AP = PD$. Mai mult, în triunghiul PMD avem $\widehat{PMD} = 90°, \widehat{PDM} = 30°$ de unde $2PM = PD$, deci $2PM = AP$ și $QF = 2AP = 4PM = 2QN$. Ținând cont de (1) se obține $QN = AE$, iar din congruența triunghiurilor EAC și QNB rezultă $EC = BQ$. Din (3) și (4) se obține $2BP = \frac{4}{3}CM$ și de aici relația dorită.

La primul baraj de selecție pentru participarea la Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori problema 5 se putea rezolva folosind aceeași metodă a „simetrizării” figurii.

4. În exteriorul trapezului $ABCD$ cu baza mică AB, construim pătratele $ADEF$ și $BCGH$. Demonstrați că mediatoarea laturii AB trece prin mijlocul segmentului FH.



Soluție:

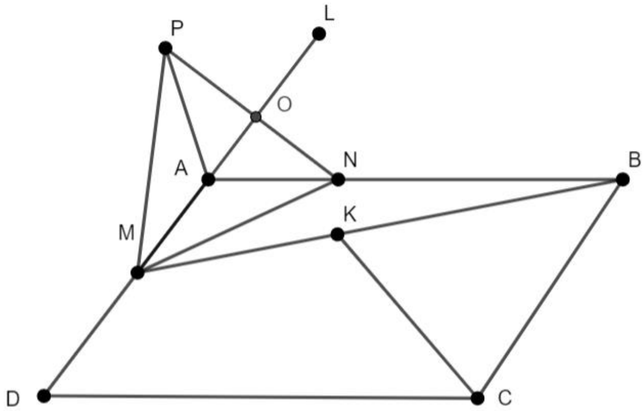
Fie $AP \perp DC, P \in DC$, $BQ \perp DC$, $Q \in DC$, $FS \perp AP$, $S \in AP$ şi $HT \perp BQ, T \in BQ$.

Din congruenţa triunghiurilor ASF şi DPA se obţine $FS \equiv AP(1)$, iar din congruenţa triunghiurilor BTH şi CQB se obţine $HT \equiv BQ(2)$. Din (1) şi (2) ţinând cont de $AP \equiv BQ$ obţinem $SF \equiv TH(3)$. Mai mult $SF \parallel TH(4)$. Dacă M este simetricul lui F faţă de dreapta NO, aceasta fiind mediatoarea segmentului AB (aici folosim simetrizarea), atunci $FO \equiv OM$ şi $FM \perp ON$.

Deoarece $ABRS$ este dreptunghi rezultă $RM \equiv FS$. Utilizând (3) şi (4) se obţine $MRTH$ dreptunghi şi de aici $HM \parallel TR \parallel OO'$, deci OO' este linie mijlocie în triunghiul FMH, deci O' este mijlocul segmentului FH.

În final prezentăm o problemă dată la Olimpiada Iraniană de Geometrie în 2018.

5. În paralelogramul $ABCD$ avem că unghiul $\widehat{CDA} = 60°, AD = 2, AB = 1 + \sqrt{3}$ şi M este mijlocul laturii AD. Bisectoarea unghiului $\widehat{BCD}$ intersectează dreapta BM în K. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{CKB}$.



Soluţie:

În triunghiul KBC avem $\widehat{CKB} = 180° - 60° - (60° - \widehat{MBA}) = 60° + \widehat{MBA}$.

Dacă $N \in AB$ astfel încât $AM = AN$ atunci triunghiul AMN este isoscel şi $\widehat{AMN} = \widehat{ANM} = 30°$. Fie P simetricul lui N faţă de AD. Atunci triunghiul MNP este echilateral, A este centrul cercului circumscris şi $AM = \frac{MN\sqrt{3}}{3}$, deci $MN = \sqrt{3} = NB$. Se obţine că triunghiul MNB este isoscel de bază MB şi $\widehat{ANM} = 2 \cdot \widehat{NBM} = 30°$ de unde se obţine $\widehat{NBM} = 15°$ şi $\widehat{BKC} = 75°$.

În concluzie, metoda simetrizării este o unealtă puternică în rezolvarea problemelor de geometrie, oferind o abordare elegantă și eficientă. Prin aplicarea acestui principiu, putem simplifica problemele complexe și le putem aduce într-o formă mai accesibilă și mai ușor de rezolvat. Metoda simetrizării utilizează simetrii și proprietăți geometrice pentru a transforma o problemă dată într-o problemă echivalentă, dar mai ușor de înțeles și de manipulat.

Pe lângă avantajele practice, metoda simetrizării dezvoltă și gândirea geometrică și creativă a rezolvitorului. Prin explorarea simetriilor și a relațiilor geometrice, putem descoperi noi proprietăți și noi moduri de a aborda problemele de geometrie. Această abordare stimulează gândirea critică și dezvoltă abilitățile analitice și de rezolvare de probleme ale elevilor.

În concluzie, metoda simetrizării aduce claritate, ordine și eficiență în procesul de rezolvare, facilitând înțelegerea și manipularea problemelor complexe. Mai mult decât atât, metoda simetrizării dezvoltă gândirea geometrică și creativă a elevilor, oferindu-le instrumente esențiale pentru a rezolva problemele de geometrie cu succes.

O teoremă referitoare la spectrul unor matrice care comută

Elevă Vîrtosu Alexandra Mihaela,
Prof. Cătălin Spiridon,
C. N. „Carol I” Craiova

Scopul acestui articol este de a aduce la lumină o teoremă puternică, însă rar întâlnită, enunțată de Ferdinand Georg Frobenius in anul 1878. Teorema face referire la o proprietate importantă a spectrului matricelor $A+B$ și AB atunci când A și B sunt două matrice pătratice de același ordin care comută.

Înainte de a prezenta enunțul teoremei și demonstrația acesteia, vom aminti câteva rezultate importante ce vor fi utile în demonstrarea propoziției, precum și în rezolvarea problemelor.

Propoziţia 1. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Numărul complex* λ *se numește valoare proprie a lui A dacă și numai dacă* $\det(A-\lambda I_n)=0$.

Obs. Mulțimea tuturor valorilor proprii ale unei matrice A se numește spectrul matricei A. Deci, spectrul lui A coincide cu mulțimea rădăcinilor polinomului caracteristic al matricei A.

Propoziţia 2. *Spectrul unei matrice superior sau inferior triunghiulare este format doar din elementele care se află pe diagonala principală a matricei.*

Demonstrație.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A= $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ? & \cdots & x_n \end{pmatrix}$. (? semnifică faptul că în locul său poate fi orice număr complex). Am ales ca matricea A să fie inferior triunghiulară, cazul în care este superior triunghiulară tratându-se analog.

Avem că $A-\lambda I_n = \begin{pmatrix} x_1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ? & \cdots & x_n-\lambda \end{pmatrix}$. Deci, $\det(A-\lambda I_n) = (x_1-\lambda)(x_2-\lambda)..(x_n-\lambda)$.

Se observă că polinomul carcateristic al lui A are rădăcinile $\{x_1, x_2, ... x_n\}$. Din **propoziţia 1** obținem că Sp(A)= $\{x_1, x_2, ... x_n\}$.

Propoziţia 3. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *și* $p \in \mathbb{C}[x]$ *un polinom. Dacă* $Sp(A)=\{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n\}$, *atunci* $Sp(p(A))=\{p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots p(\lambda_n)\}$.

Propoziţia 4. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Si* $p \in \mathbb{C}[x]$ *un polinom astfel încât* $p(A)=O_n$. *Atunci* $p(\lambda)=0$, *pentru orice* $\lambda \in Sp(A)$.

Definiţia 1. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Matricele A și B se numesc **matrice asemenea** dacă și numai dacă există $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversabilă astfel încât $A = PBP^{-1}$.*

Proprietăţi. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice asemenea. Atunci au loc următoarele relații :

1. *A și B au același polinom caracteristic.*
   Demonstrație : $\mathrm{A} - xI_n = \mathrm{PB}P^{-1} - x\mathrm{P}P^{-1} = \mathrm{P}(\mathrm{B} - xI_n)\, P^{-1}$
   Trecând la determinant în relația obținută avem că :
   $$\det(\mathrm{A} - xI_n) = \det(P(B - xI_n)\,P^{-1}) = \det P \det P^{-1} \det(\mathrm{B} - xI_n) = \det(\mathrm{B} - xI_n)$$
   pentru orice x număr complex q.e.d.
2. *A și B au același spectru(consecința 1)*
3. *A și B au același determinant și urmă(consecința 2)*
4. *A și B au aceeași formă canonică Jordan.*

Definiţia 2. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Matricea transpusă și conjugată a matricei A se numește **adjuncta hermitiană** a matricei A și se noteaza A^*.* $(A^* = \overline{A^t})$

Definiţia 3. *Fie $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_n}(\mathbb{C})$ U se numește **matrice unitară** dacă inversa sa este adjuncta hermitiană $\boldsymbol{U}^*$, adică dacă are loc relația $\boldsymbol{UU}^* = \boldsymbol{I_n}$.*

Teorema de triunghiularizare unitară a lui Schur

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Există o matrice unitară $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât U^*AU este superior triunghiulară, având pe diagonala principală toate valorile proprii ale matricei A.

Teorema de triunghiularizare simultană

Pentru o mulțime de matrice pătratice, de același ordin și cu elemente complexe, care comută oricare două între ele, există o matrice unitară U$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât U^*AU este superior triunghiulară, având pe diagonala principală toate valorile proprii ale matricei A, pentru orice A din mulțimea de matrice.

Cu ajutorul noțiunilor introductive prezentate, putem enunța și demonstra teorema referitoare la spectrul unor matrice care comută.

Teoremă. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ doua matrice care comută. Fie $Sp(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ și $Sp(B) = \{\beta_1, \beta_2, .., \beta_n\}$. Atunci există o permutare $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ a mulțimii $\{1, 2, .., n\}$ astfel încât*

$Sp(A + B) = \{\alpha_1 + \beta_{i_1}, \alpha_2 + \beta_{i_2}, \dots, \alpha_n + \beta_{i_n}\}$ și $Sp(AB)=\{\alpha_1 \beta_{i_1}, \alpha_2 \beta_{i_2}, \dots, \alpha_n \beta_{i_n}\}$.
Demonstrație:

Deoarece A și B comută, teorema de triunghiularizare simultană ne permite să afirmăm că există o matrice unitară $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât matricele $\mathrm{U}^*AU = T = (t_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ și $\mathrm{U}^*BU = R = (r_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$BU sunt ambele superior triunghiulare, având pe diagonala principală valorile proprii ale lui A, respectiv B. Deci $\mathrm{Sp(A)} = \{t_{11}, t_{22}, \dots, t_{nn}\}$ și $\mathrm{Sp(B)} = \{r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn}\}$.

Astfel că, dacă matricele T + R și TR sunt ambele superior triunghiulare, având pe diagonala principală intrările $\{t_{11} + r_{11}, t_{22} + r_{22}, \dots t_{nn} + r_{nn}\}$ și $\{t_{11}r_{11}, t_{22}r_{22}, \dots t_{nn}r_{nn}\}$. Deoarece sunt matrice superior triunghiulare, conform propoziției 2 intrările de pe diagonala principală ale matricelor T + R și TR sunt valorile lor proprii.

Avem: $\mathrm{T + R = U^*AU + U^*BU = U^*\,(A + B)U}$ și $\mathrm{TR = U^*AUU^*BU = U^*ABU}$. Deoarece U este unitară, rezultă că U^* este inversa sa. Cum U^* este inversa lui U, din definiția 1 obținem că T +

R și A + B sunt asemenea, precum și TR cu AB sunt asemenea. Din proprietatea 2 a matricelor asemenea, avem că $\mathrm{Sp}(T+R)=\mathrm{Sp}(A+B)$ și $\mathrm{Sp}(TR)=\mathrm{Sp}(AB)$.

Dar $\mathrm{Sp}(T+R)=\{\, t_{11}+r_{11}, t_{22}+r_{22}, \dots t_{nn}+r_{nn}\,\}$, deci $\mathrm{Sp}(A+B)=\{\, t_{11}+r_{11}, t_{22}+r_{22}, \dots t_{nn}+r_{nn}\}$. Dar $\mathrm{Sp}(TR)=\{t_{11}r_{11}, t_{22}r_{22}, \dots t_{nn}r_{nn}\}$ și deci $\mathrm{Sp}(AB)=\{t_{11}r_{11}, t_{22}r_{22}, \dots t_{nn}r_{nn}\}$.

Cum $\mathrm{Sp}(A)=\{t_{11}, t_{22}, \dots, t_{nn}\}$ și $\mathrm{Sp}(B)=\{\, r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn}\}$ se obține concluzia.

Observații

1. *Faptul că A și B comută este esențial. Astfel că, dacă într-o problemă ipoteza face referire la faptul că AB=BA, este posibil ca această teoremă să fie soluția.*
2. *Se observă că este aceeași permutare atât pentru $Sp(A+B)$, cât și pentru $Sp(AB)$. Teorema afirmă că există o permutare astfel încât cele două spectre să poată fi scrise ca sumă, respectiv produs de valori prorprii ale matricelor A și B.*

Aplicații:

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice astfel încât $A^{2002}=B^{2003}=I_n$ și $AB = BA$. Să se demonstreze că matricea $A+B+I_n$ este inversabilă.

Concursul Vojtech Jarnik, categoria a II-a, 2003/1

Demonstrație:

Matricea Aanulează polinomul $f=X^{2002}-1$, iar matricea B anulează polinomul $g=X^{2003}-1$. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A și $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui B.

Avem că $f(\lambda)=0$ și $g(\mu)=0$ pentru orice λ din spectrul lui A, respectiv pentru orice μ din spectrul lui B. Astfel că Sp(A) este format din rădăcini de ordin 2002 ale unității și Sp(B) este format din rădăcini de ordin 2003 ale unității. Întrucât A și B comută, în baza teoremei, există o ordine a spectrelor lui A și B astfel încât $\mathrm{Sp}(A+B)=\{\,\lambda_1+\mu_{i_1}, \lambda_2+\mu_{i_2}, \dots, \lambda_n+\mu_{i_n}\}$ unde $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ este o permutare a mulțimii $\{1,2,3,\dots,n\}$. Cum I_n comută cu $A+B$, aplicând iarăși teorema obținem că $\mathrm{Sp}(A+B+I_n)=\{\,\lambda_1+\mu_{i_1}+1, \lambda_2+\mu_{i_2}+1, \ \dots, \ \lambda_n+\mu_{i_n}+1\}$. Pentru a demonstra că $A+B+I_n$ este inversabilă, este suficient să arătăm că dacă λ este o valoare proprie a lui A, iar μ este o valoare proprie a lui B, atunci $\lambda+\mu+1\neq 0$. Presupunem, prin absurd, că există o valoare proprie λ a lui A precum și o valoare proprie μ a lui B astfel că $\lambda+\mu+1=0$. Avem $\lambda^{2002}=\mu^{2003}=1$, deci există două numere întregi k și m astfel încât $\lambda=\cos\frac{2k\pi}{2002}+i\sin\frac{2k\pi}{2002}$ și $\mu=\cos\frac{2m\pi}{2003}+i\sin\frac{2m\pi}{2003}$. Condiția $\lambda+\mu+1=0$ este echivalentă cu

$$\begin{cases} \cos\dfrac{2k\pi}{2002}+\cos\dfrac{2m\pi}{2003}=-1 \\ \sin\dfrac{2k\pi}{2002}+\sin\dfrac{2m\pi}{2003}=0 \end{cases}$$

Ridicând cele două egalități la pătrat și apoi adunându-le membru cu membru, obținem $\cos\left(2\pi\left(\frac{k}{2002}-\frac{m}{2003}\right)\right)=-\frac{1}{2}$. Drept urmare, există un număr întreg n astfel încât $2\pi\left(\frac{k}{2002}-\frac{m}{2003}\right)=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi \Leftrightarrow \frac{k}{2002}-\frac{m}{2003}=\frac{3n\pm1}{3}$. Ultima egalitate conduce la $3(2003k-2002m)=2002\cdot2003(3n\pm1)$, care nu poate avea loc, întrucât membrul stâng se divide cu 3, pe când cel drept nu. Contradicția obținută arată că matricea $A+B+I_n$ este inversabilă.

2. Fie matricele $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $A^2=B^2=O_3$. Demonstrați că $AB=BA$ implică $AB=O_3$. Arătați că implicația reciprocă este falsă.

Olimpiada județeană de matematică 2023,
clasa a XI-a, problema 4

Demonstrație:

Aplicând inegalitatea lui Sylvester obținem :

$\mathbf{0}=\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{A^2})\geq \boldsymbol{2rang}(\boldsymbol{A})-\mathbf{3}$ de unde rezultă că $\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{A})\leq\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$. Dar $\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{A})$ este un număr natural, deci$\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{A})\leq\mathbf{1}$. Analog se arată că $\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{B})\leq\mathbf{1}$.

Dacă $\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{A})=\mathbf{0}$ sau $\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{B})=\mathbf{0}$, atunci $\boldsymbol{A}=\mathbf{O_3}$ sau $\boldsymbol{B}+\mathbf{O_3}$ de unde se obține concluzia.

Analizăm cazul când $\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{A})=\mathbf{1}$ și $\boldsymbol{rang}(B)=\mathbf{1}$.

Deoarece $\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{A})=\mathbf{1}$, rezultă că există $\boldsymbol{L_1}\in\boldsymbol{\mathcal{M}}_{1,3}(\mathbb{C})$, și $\boldsymbol{C_1}\in\boldsymbol{\mathcal{M}}_{3,1}(\mathbb{C})$, a.î. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C_1L_1}$.

Analog, există $\boldsymbol{L_2}\in\boldsymbol{\mathcal{M}}_{1,3}(\mathbb{C})$, și $\boldsymbol{C_2}\in\boldsymbol{\mathcal{M}}_{3,1}(\mathbb{C})$, a.î. $B=\boldsymbol{C_2L_2}$.

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C_1L_1C_2L_2}=\boldsymbol{\beta C_1L_2}$, unde $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{L_1C_2}$ este un număr complex(1)

$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{C_2L_2C_1L_1}=\boldsymbol{\lambda C_2L_1}$, unde $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{L_2C_1}$ este un număr complex(2)

Avem că $\boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{\beta C_1L_2})=\boldsymbol{\beta Tr}(\boldsymbol{C_1L_2})=\boldsymbol{\beta L_2C_1}=\boldsymbol{\beta\lambda}$.

Fie polinomul $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{X^2}\in\mathbb{C}[\boldsymbol{X}]$. Din ipoteză, avem că $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A})=\mathbf{O_3}$. Din propoziția 4 se obține că $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$, pentru orice $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{A})$. Deci, $\boldsymbol{\alpha^2}=\mathbf{0}$, pentru orice $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{A})$. Astfel că $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{A})=\{\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\}$. Analog $\boldsymbol{\mu^2}=\mathbf{0}$ pentru orice $\boldsymbol{\mu}\in\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{B})$. Deci, $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{B})=\{\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\}$.

Deoarece $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, putem aplica teorema. Există deci o ordine a celor două spectre astfel încât $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{AB})=\{\boldsymbol{\alpha_1\mu_{i_1}},\boldsymbol{\alpha_2\mu_{i_2}},\boldsymbol{\alpha_3\mu_{i_3}}\}$unde $(\boldsymbol{i_1},\boldsymbol{i_2},\boldsymbol{i_3})$ este o permutare a mulțimii $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}$. Ținând cont de faptul că $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{A})=\{\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\}$ și $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{B})=\{\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\}$, obținem că $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{AB})=\{\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}\}$. Deci, $\boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{AB})=\mathbf{0}$. Adică $\boldsymbol{\beta\lambda}=\mathbf{0}$, de unde $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ sau $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$.

Dacă $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, atunci din (1) $\boldsymbol{AB}=\mathbf{O_3}$.

Dacă $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$, atunci din (2) $\boldsymbol{BA}=\mathbf{O_3}$. Cum $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, avem că $\boldsymbol{AB}=\mathbf{O_3}$.

Contraexemplu pentru implicația reciprocă este următorul: fie A $=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$ și

B$=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$.

Avem $\mathbf{A^2}=\mathbf{B^2}=\boldsymbol{AB}=\mathbf{O_3}$, dar $\boldsymbol{AB}$ este diferit de $\boldsymbol{BA}$.

3. Fie $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$, astfel încât $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ și $\boldsymbol{k}$ număr natural nenul pentru care $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{n}}$. Să se arate că $\mathbf{det}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathbf{det}\,\boldsymbol{A}$.

Demonstrație :

Fie $\boldsymbol{\lambda_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda_n} \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale matricei $\boldsymbol{A}$, fie $\boldsymbol{\mu_1}, \dots \boldsymbol{\mu_n} \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale matricei $\boldsymbol{B}$. Din $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{n}}$ și din propoziția 4 rezultă că toate valorile proprii ale matricei $\boldsymbol{B}$ sunt 0. Cum $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, conform teoremei, există o ordine a celor două spectre astfel încât $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \{\boldsymbol{\lambda_1} + \boldsymbol{\mu_{i_1}},\ \boldsymbol{\lambda_2} + \boldsymbol{\mu_{i_2}} \dots \boldsymbol{\lambda_n} + \boldsymbol{\mu_{i_n}}\}$ unde $(\boldsymbol{i_1},\ \boldsymbol{i_2}, \dots \boldsymbol{i_1})$ este o permutare a mulțimii $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots, \boldsymbol{n}\}$. Cum spectrul matricei $\boldsymbol{B}$ este format numai din elemente nule, obținem că $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \{\boldsymbol{\lambda_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda_n}\}$. Deci $\mathbf{det}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\lambda_1}\boldsymbol{\lambda_2} \dots \boldsymbol{\lambda_n} = \mathbf{det}\,\boldsymbol{A}$.

4. Fie $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C}) \mid \mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{z}\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}) = \mathbf{0} \Longrightarrow |\boldsymbol{z}| < \mathbf{1}\}$. Să se demonstreze că dacă $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}$ și $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, atunci $\boldsymbol{AB} \in \boldsymbol{M}$.

Demonstrație:

Din $\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{z}\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}) = \mathbf{0}$ și din propoziția 1 rezultă că $\boldsymbol{z}$ este valoare proprie pentru $\boldsymbol{A}$.

Astfel, dacă $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}$, valorile proprii ale matricelor $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ sunt de modul strict mai mic decât 1. Pentru a arăta că $\boldsymbol{AB} \in \boldsymbol{M}$, trebuie să demonstrăm că valorile proprii ale matricei $\boldsymbol{AB}$ sunt de modul strict mai mic decât 1.

Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale matricei A, și $\mu_1, \dots \mu_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale matricei B. Avem $|\lambda_i| < 1$ și $|\mu_i| < 1$ pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Întrucât A și B comută, în baza teoremei, există o ordine a matricelor A și B astfel încât

$Sp(AB) = \{\lambda_1\mu_{i_1},\ \lambda_2\mu_{i_2}, \dots, \lambda_n\mu_{i_n}\}$ unde $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ este o permutare a mulțimii *{1, 2, 3,…, n}*. Cum $|\lambda_i\mu_i| = |\lambda_i||\mu_i| < 1$ pentru orice $i = \overline{1, n}$, rezultă că toate valorile proprii ale matricei AB au modulul strict mai mic decât 1, deci $AB \in M$.

5. Fie n un număr natural mai mare sau egal ca 2 și fie $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$, trei matrice care comută două câte două și $\boldsymbol{A}^{\mathbf{1999}} = \boldsymbol{B}^{\mathbf{1999}} = \boldsymbol{C}^{\mathbf{1999}} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{n}}$. Să se demonstreze că matricea $\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{B}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}^{\mathbf{2}}$ este inversabilă.

(Florentina Boboc, Dumitru Bușneag)

Demonstrație :

Fie $\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b_i}, \boldsymbol{c_i}$ cu $\boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}}$ valorile proprii ale matricelor $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, respectiv $\boldsymbol{C}$. Deoarece $\boldsymbol{A}^{\mathbf{1999}} = \boldsymbol{B}^{\mathbf{1999}} = \boldsymbol{C}^{\mathbf{1999}} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{n}}$, din propoziția 4 obținem că $\boldsymbol{a_1} = \dots = \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{b_1} = \dots = \boldsymbol{b_n} = \boldsymbol{c_1} = \dots = \boldsymbol{c_n} = \mathbf{0}$.

Din propoziția 3 obținem că $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}) = \{\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}, \dots, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}^{\mathbf{2}}\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}\}$. Analog obținem că $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{B}^{\mathbf{2}}) = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}\}$ și $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{C}^{\mathbf{2}}) = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}\}$. Deoarece matricele A și B comută, atunci și $\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}$ cu $\boldsymbol{B}^{\mathbf{2}}$ comută. Deci, conform teoremei obținem că $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{B}^{\mathbf{2}}) = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}\}$ Cum C comută cu A și B, atunci $\boldsymbol{C}^{\mathbf{2}}$ va comuta cu $\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{B}^{\mathbf{2}}$. Aplicând teorema, obținem că $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{B}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}^{\mathbf{2}}) = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}\}$. Cum $\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}$ comută cu $\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{B}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}^{\mathbf{2}}$ și $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}) = \{\mathbf{1}, \mathbf{1}, \cdots, \mathbf{1}\}$ aplicând încă o dată teorema deducem că $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{B}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}) = \{\mathbf{1} + \mathbf{0}, \mathbf{1} + \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{1} + \mathbf{0}\} = \{\mathbf{1}, \mathbf{1}, \cdots, \mathbf{1}\}$. Deci, $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{B}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}) = \mathbf{1}$ de unde rezultă că matricea $\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{B}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}$ este inversabilă.

6. Fie $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ și fie $\boldsymbol{A}^*$ adjuncta hermitiană (adică matricea având elementele $\boldsymbol{a}_{ij}^* = \overline{\boldsymbol{a}_{ji}}$) Demonstrați că dacă $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^2$, atunci $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$.

K. R. Laberteaux, Amer. Math. Monthly, pb. 10377 [1994, p. 362]

Demonstrație: (folosind teorema de triangularizare unitară a lui Schur)

Conform teoremei de triangularizare unitară a lui Schur, există o matrice unitară $\boldsymbol{U} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ astfel încât matricea $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{AU}$ să fie superior triunghiulară. Atunci avem $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{UT}\,\boldsymbol{U}^*$, de unde rezultă că $\boldsymbol{A}^* = (\boldsymbol{UT}\,\boldsymbol{U}^*)^* = \boldsymbol{UT}^*\boldsymbol{U}^*$.

Deci, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$ dacă și numai dacă $\boldsymbol{UT}\,\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{UT}^*\boldsymbol{U}^*$. Astfel că, cerința problemei devine echivalentă cu a arăta că $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^*$(se înmulțește la stânga cu $\boldsymbol{U}^*$și la dreapta cu $\boldsymbol{U}$ în relația precedentă și se ține cont că $\boldsymbol{UU}^* = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}$)

Condiția $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^2$ din ipoteză implică $\boldsymbol{UT}\,\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{UT}^*\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{UTU}^*\boldsymbol{UTU}^*$. Se înmulțește la stânga cu $\boldsymbol{U}^*$ și la dreapta cu $\boldsymbol{U}$ și se ține cont că $\boldsymbol{UU}^* = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}$, obținându-se $\boldsymbol{TT}^* = \boldsymbol{T}^2$.
Fie $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ij}}$ elementul de pe linia *i* și coloana *j* în matricea $\boldsymbol{T}$.
Elementul de pe poziția $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ din matricea $\boldsymbol{AA}^*$, unde $\boldsymbol{A}$ este o matrice oarecare de ordin $\boldsymbol{n}$ cu elemente complexe și $\boldsymbol{A}^*$ este adjuncta hermitiană, este $|\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}1}|^2 + |\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}2}|^2 + \cdots + |\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{in}}|^2$.
Cum $\boldsymbol{T}$ este superior triunghiulară, elementul de pe poziția $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i})$ în matricea $\boldsymbol{TT}^*$ este egal cu $|\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}}|^2 + |\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}+1}|^2 + \cdots + |\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{in}}|^2$ (întrucât elementele $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}1} = \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{i}2} = \cdots = \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}-1} = \mathbf{0}$), iar elementul de pe poziția $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i})$ în matricea $\boldsymbol{T}^2$ este egal cu $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}}^2$.

Deoarece $\boldsymbol{TT}^* = \boldsymbol{T}^2$, se obține egalitatea $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}}^2 = |\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}}|^2 + |\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}+1}|^2 + \cdots + |\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{in}}|^2$ de unde rezultă că $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}}^2$ este un număr real mai mare sau egal ca zero, deci $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}}$ este un numar real. Obținem că $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}}^2 = |\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}}|^2$, astfel că în egalitatea de mai sus $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}}^2$ și $|\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}}|^2$ se reduc și se obține $|\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}+1}|^2 + \cdots + |\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{in}}|^2 = \mathbf{0}$, de unde rezultă că $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{ii}+1} = \cdots = \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{in}} = \mathbf{0}$.

Deci, linia $\boldsymbol{i}$ a matricei $\boldsymbol{T}$ are toate elementele nule, mai puțin elementul de pe coloana $\boldsymbol{i}$ care este real.Cum $\boldsymbol{i}$ a fost ales întâmplător, concluzia se păstrează pentru orice $\boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \mathbf{n}}$. Cu alte cuvinte, matricea $\boldsymbol{T}$ este diagonală, iar elementele de pe diagonala sa principală sunt numere reale. Deducem de aici că $\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{T}$, deci $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{UT}^*\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{UTU}^* = \boldsymbol{A}$.

Bibliografie

1. Roger A.Horn Charles R. Johnson *Matrix Analysis. Second Edition* pag 117, pag 103
2. math.ubbcluj.ro/~ttrif/Diagonalizabilitate.pdf
3. *Gazeta matematică seria B, Nr.11 din 2014, Valori proprii*
4. *Gazeta matematică seria B, Nr. 1 din2020, Aplicații ale formei canonice Jordan*

Criterii de divizibilitate

Prof. Aurelia Petrică
C.N. „Carol I”, Craiova

Un criteriu de divizibilitate este o regulă prin care se stabilește dacă un număr natural a este divizibil cu un număr natural nenul, fără a efectua împărțirea lui a la b.

Prezint în continuare, criterii de divizibilitate utile în practică.

1. Criteriul general de divizibilitate

Numărul $\mathrm{m} = \overline{\mathrm{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}}$ este divizibil cu $10\mathrm{p} \pm \mathrm{n}$, p, $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$, dacă și numai dacă înlăturând ultima cifră, înmulțind numărul obținut cu n și scăzând (adunând)la noul număr de p ori cifra suprimată, se obține un număr divizibil cu $10\mathrm{p} \pm \mathrm{n}$.

Demonstrație: Efectuând operațiile indicate obținem numărul $\mathrm{m_1} = (\mathrm{a_k} \cdot 10^{\mathrm{k}-1} + \mathrm{a_{k-1}} \cdot 10^{\mathrm{k}-2} + \dots + \mathrm{a_1}) \cdot \mathrm{n} \pm \mathrm{pa_0}$. Atunci $10\mathrm{m_1} - nm = \mp(10\mathrm{p} \pm \mathrm{n})\mathrm{a_0}$. Rezultă că $10\mathrm{p} \pm \mathrm{n} | \mathrm{m}$ dacă și numai dacă $10\mathrm{p} \pm \mathrm{n} | \mathrm{m_1}$.

2. Criteriul general de divizibilitate

Numărul natural $\mathrm{m} = \overline{\mathrm{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}}$ se divide cu numărul natural p dacă și numai dacă suma dintre cifrele sale înmulțite cu restul împărțirii la p a puterii lui 10 asociată cifrei este un număr divizibil cu p.

Demonstrație: Numărul m se scrie în baza 10 sub forma: $\mathrm{m} = \overline{\mathrm{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}} = \mathrm{a_k} \cdot 10^{\mathrm{k}} + \mathrm{a_{k-1}} \cdot 10^{\mathrm{k}-1} + \dots + \mathrm{a_1} \cdot 10 + \mathrm{a_0}$. Deoarece $10^{\mathrm{k}} = \mathrm{p} \cdot \mathrm{c_k} + \mathrm{r_k}$, $\mathrm{r_k} < \mathrm{p}$, atunci

$$\mathrm{m} = \mathrm{M_p} + \mathrm{a_k} \cdot \mathrm{r_k} + \mathrm{a_{k-1}} \cdot \mathrm{r_{k-1}} + \mathrm{a_{k-2}} \cdot \mathrm{r_{k-2}} + \dots + \mathrm{a_1} \cdot \mathrm{r_1} + \mathrm{a_0}.$$

Rezultă că $p|m$ dacă și numai dacă $\mathrm{p} |\ \mathrm{a_k} \cdot \mathrm{r_k} + \mathrm{a_{k-1}} \cdot \mathrm{r_{k-1}} + \mathrm{a_{k-2}} \cdot \mathrm{r_{k-2}} + \dots + \mathrm{a_1} \cdot \mathrm{r_1} + \mathrm{a_0}$.

3. Criteriul de divizibilitate cu 8

Un număr natural este divizibil cu 8 dacă și numai dacă suma dintre cifra unităților, dublul cifrei zecilor și cifra sutelor mărită de patru ori este divizibilă cu 8.

Demonstrație. Fie $\mathrm{m} = \overline{\mathrm{a}_k \mathrm{a_{k-1} \dots a_1 a_0}}$, $\mathrm{p} = \overline{\mathrm{a}_k \mathrm{a_{k-1} \dots a_3}}$ și $\mathrm{q} = \overline{\mathrm{a_2 a_1 a_0}}$, cu $\mathrm{k} \in \mathbb{N}, \mathrm{k} \geq 2$.

Atunci $\mathrm{m} = 10^3\mathrm{p} + \mathrm{q} = \mathrm{M_8} + 4\mathrm{a_2} + 2\mathrm{a_1} + \mathrm{a_0}$. Rezultă că $8|\mathrm{m}$ dacă și numai dacă $8|\ (4\mathrm{a_2} + 2\mathrm{a_1} + \mathrm{a_0})$.

4. Criterii de divizibilitate cu 7, 11, 13

Un număr natural este divizibil cu 7 (sau cu 11 sau cu 13) dacă și numai dacă diferența dintre cele două numere obținute prin „tăierea” numărului dat în două astfel încât la dreapta să rămână un număr de trei cifre, este divizibilă cu 7 (sau 11sau 13).

Demonstrație. Fie $\mathrm{m} = \overline{\mathrm{a}_k \mathrm{a_{k-1} \dots a_1 a_0}}$, $\mathrm{p} = \overline{\mathrm{a}_k \mathrm{a_{k-1} \dots a_3}}$ și $\mathrm{q} = \overline{\mathrm{a_2 a_1 a_0}}$, cu $\mathrm{k} \in \mathbb{N}, \mathrm{k} \geq 2$.

Atunci $\mathrm{m} = 10^3\mathrm{p} + \mathrm{q} = (7 \cdot 11 \cdot 13 - 1)\mathrm{p} + \mathrm{q} = 7 \cdot 11 \cdot 13\mathrm{p} + \mathrm{q} - \mathrm{p}$. Rezultă că $7|\mathrm{m}$ dacă și numai dacă $7|\mathrm{q} - \mathrm{p}$.

5. Alt criteriu de divizibilitate cu 11

Numărul $\mathrm{m} = \overline{\mathrm{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}}$ este divizibil cu 11 dacă și numai dacă suma alternativă a cifrelor lui m (adică numărul $p = \mathrm{a_0} - \mathrm{a_1} + \mathrm{a_2} - \mathrm{a_3} + \dots$) este divizibil cu 11.

Demonstrație. Avem $m = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Dacă $n = 2k$, atunci $10^n = 10^{2k} = 9 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{2k \text{ cifre}} + 1 = 9 \cdot M_{11} + 1$.

Dacă $n = 2k+1$, atunci $10^n = \underbrace{100\ldots01}_{2k+2 \text{ cifre}} - 1 = \underbrace{9090\ldots9091}_{2k \text{ cifre}} \cdot 11 - 1 = .M_{11} - 1$.

Rezultă că $m = p + M_{11}$ și deci $11|m \Leftrightarrow 11|p$.

6. Alt criteriu de divizibilitate cu 7

Numărul natural $m = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ este divizibil cu 7 dacă și numai dacă numărul $p = a_k \cdot 3^k + a_{k-1} \cdot 3^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 3 + a_0$ este divizibil cu 7.
Demonstrație: Avem $m = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ și $10^k = M_7 + 3^k$. Atunci $m = M_7 + p$. Rezultă că $7|m$ dacă și numai dacă $7|p$.

7. Criterii de divizibilitate cu 27, cu 37

Un număr natural este divizibil cu 27 (respectiv 37) dacă și numai dacă suma numerelor naturale obținute din el prin „tăierea” în grupe de câte 3 cifre, începând de la dreapta, se divide cu 27 (respectiv 37) .
Demonstrație. Avem $1000 = 27 \cdot 37 + 1$.
Fie $m = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ și $p = \overline{a_2 a_1 a_0} + \overline{a_5 a_4 a_3} + \cdots$, cu $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Atunci $m = M_{999} + p$. Rezultă că $27|m$ dacă și numai dacă $27|p$.

8. Criterii de divizibilitate cu 3, 7, 19

Un număr natural este divizibil cu 3 (sau cu 7 sau cu 19) dacă și numai dacă suma dintre numărul format din ultimele două cifre mărit de 4 ori și numărul format din celelalte cifre este divizibilă cu 3 (sau cu 7 sau cu 19).

Demonstrație. Avem $400 = 3 \cdot 7 \cdot 19 + 1$. Fie $m = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ și $p = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2}$, cu $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Atunci $4m = 400p + 4 \cdot \overline{a_1 a_0} = 3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot p + p + 4 \cdot \overline{a_1 a_0}$. Rezultă că $19|m$ dacă și numai dacă $19|(p + 4 \cdot \overline{a_1 a_0})$.

Bibliografie

1. Bălăuca A..Olimpiade, concursuri și centre de excelență, Ed. Taida, 2019
2. Năchilă P., Probleme de matematică pentru concursuri, Ed.Sigma, 2006
3. www.viitoriiolimpici.ro

O completare a unei teoreme din manual

Prof. Ionuț Ivănescu,
C.N.P. „Ștefan Velovan”, Craiova

În toate manualele de matematică, la lecția “Modulul unui număr complex”, un loc important îl ocupă „inegalitatea triunghiului”:

Pentru orice numere complexe z_1 si z_2 are loc inegalitatea $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Din păcate, manualele nu ne spun când inegalitatea devine egalitate. Exista însă o problemă și mai interesantă. Care este condiția necesară și suficientă ca pentru n numere complexe $z_1, z_2, \dots, z_n$ sa aiba loc egalitatea :

$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$?

În cele ce urmează, teorema de mai jos va da răspunsul complet la aceasta întrebare.

Teorema: Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $z_1, z_2, \dots, z_n$ n numere complexe nenule. Condiția necesară și suficientă pentru ca $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$ este ca să existe $a_2, \dots, a_n \in (0, +\infty)$ astfel încât $z_2 = a_2 \cdot z_1$, $z_3 = a_3 \cdot z_1$, $\dots$, $z_n = a_n \cdot z_1$.

Demonstrație: Vom demonstra afirmația din teoremă prin inducție matematică după n.

Să demonstram mai întâi propoziția P(2), unde P(n) este propoziția din enunț.

Fie $z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)$ și $z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$, unde $r_1, r_2 \in (0, +\infty)$ și t_1, $t_2 \in [0, 2\pi)$.

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \sqrt{(r_1\cos t_1 + r_2\cos t_2)^2 + (r_1\sin t_1 + r_2\sin t_2)^2} = r_1 + r_2$$

$$\Leftrightarrow (r_1\cos t_1 + r_2\cos t_2)^2 + (r_1\sin t_1 + r_2\sin t_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_1^2 \cdot \cos^2 t_1 + 2\cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos t_1 \cdot \cos t_2 + r_2^2 \cdot \cos^2 t_2 + r_1^2 \cdot \sin^2 t_1 + 2\cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \sin t_1 \cdot$$

$$\sin t_2 + r_2^2 \cdot \sin^2 t_2 = r_1^2 + 2\cdot r_1 \cdot r_2 + r_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_1^2 \cdot (\cos^2 t_1 + \sin^2 t_1) + 2\cdot r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos t_1 \cdot \cos t_2 + \sin t_1 \cdot \sin t_2) + r_2^2 \cdot (\cos^2 t_2 +$$

$$\sin^2 t_2) = r_1^2 + 2\cdot r_1 \cdot r_2 + r_2^2 \Leftrightarrow r_1^2 + r_2^2 + 2\cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(t_1 - t_2) = r_1^2 + r_2^2 + 2\cdot r_1 \cdot r_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(t_1 - t_2) = 1.$$ Cum $t_1 - t_2 \in (-2\pi, 2\pi)$. deducem ca $t_1 = t_2 = t$.

Deci $z_2 = r_2(\cos t + i\cdot\sin t) = \frac{r_2}{r_1} \cdot r_1 \cdot (\cos t + i \cdot \sin t) = \frac{r_2}{r_1} \cdot z_1$. Notând $\frac{r_2}{r_1} = a_2 > 0$, obtinem că $z_2 = a_2 \cdot z_1$, cu $a_2 \in (0, +\infty)$ c.c.t.d.

Reciproc, dacă $z_2 = a_2 \cdot z_1$, se verifică ușor că $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

Să demonstram acum implicația P(k) ⟶ P(k + 1), pentru $k \in \mathbb{N}, k \geq 2, k$ fixat.

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_k| + |z_{k+1}| = |z_1 + z_2 + \dots + z_k + z_{k+1}| =$$

$$= |z_1 + (z_2 + \dots + z_k + z_{k+1})| \leq |z_1| + |(z_2 + \dots + z_k + z_{k+1})| \leq$$

$$\leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_k| + |z_{k+1}|.$$

Deci $|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_k|+|z_{k+1}|=|z_1|+|z_2+\ldots+z_k+z_{k+1}| \Longrightarrow$

$\Longrightarrow |z_2|+\ldots+|z_k|+|z_{k+1}|=|z_2+\ldots+z_k+z_{k+1}|$.

Din ipoteza de inducție deducem că există $b_3, b_4\ldots, b_n \in (0,+\infty)$ astfel încât

$$z_3 = b_3\cdot z_2,\ z_4 = b_4\cdot z_2, \ldots, z_k = b_k\cdot z_2 \text{ si } z_{k+1} = b_{k+1}\cdot z_2$$

Așadar $|z_1+z_2+b_3\cdot z_2+b_4\cdot z_2+\ldots+b_k\cdot z_2+b_{k+1}\cdot z_2| = |z_1|+|z_2|+|b_3z_2|+$

$+|b_4z_2|+\ldots+|b_kz_2|+|b_{k+1}z_2|$

Deci $|z_1|+|z_2|+b_3\cdot|z_2|+b_4\cdot|z_2|+\ldots+b_k\cdot|z_2|+b_{k+1}\cdot|z_2| =$

$=|z_1+z_2+b_3\cdot z_2+b_4\cdot z_2+\ldots+b_k\cdot z_2+b_{k+1}\cdot z_2|=$

$=|(z_1+z_2)+b_3\cdot z_2+b_4\cdot z_2+\ldots+b_k\cdot z_2+b_{k+1}\cdot z_2|\leq$

$\leq|z_1+z_2|+b_3\cdot|z_2|+b_4\cdot|z_2|+\ldots+b_k\cdot|z_2|+b_{k+1}\cdot|z_2|$

Deducem ca $|z_1|+|z_2| \leq |z_1+z_2| \Longrightarrow |z_1|+|z_2|=|z_1+z_2| \Longrightarrow z_2 = b_2\cdot z_1$,

unde $b_2 \in (0,+\infty)$

Astfel am găsit $z_2 = b_2\cdot z_1$, $z_3 = b_3\cdot b_2\cdot z_1$, $z_4 = b_4\cdot b_2\cdot z_1, \ldots, z_{k+1} = b_{k+1}\cdot b_2\cdot z_1$. Notând $a_2 = b_2 > 0$, $a_3 = b_3\cdot b_2 > 0$, $a_4 = b_4\cdot b_2 > 0, \ldots, a_{k+1} = b_{k+1}\cdot b_2 > 0$, demonstrația se încheie. Implicația reciprocă se demonstrează foarte ușor prin calcul.

PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA CONCURSURILOR DE MATEMATICĂ

1. Determinați numerele naturale $n > 1$ care au proprietatea: pentru orice divizor $d > 1$ al lui n, $d - 1$ este divizor al lui $n - 1$.

Czech-Polish-Slovak Junior Match, 2015

Soluție: Dacă n este număr prim evident $d = n$ și $d - 1 = n - 1$ și condiția este verificată.

Dacă n nu este număr prim atunci avem un divizor d pentru care $1 < d < n$ şi $\frac{n}{d}, \frac{n-1}{d-1} \in \mathbb{N}$, iar $\frac{n-1}{d-1} - \frac{n}{d} = \frac{n-d}{d(d-1)} \geq 1$. Se obține $n \geq d^2$. Dacă ar exista un divizor $d < \sqrt{n}$ atunci $\frac{n}{d} > \sqrt{n}$ este divizor deci contradicție. Deci singurul divizor propriu al lui n este $\sqrt{n} = p$ număr prim, deci $n = p^2$.

2. Determinați numărul perechilor de numere naturale (a, b) care au cel mai mare divizor comun $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 50$ şi cel mai mic multiplu comun egal cu $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 50^2$.

Czech-Polish-Slovak Junior Match, 2021

Soluție: Dacă $(a, b) = d = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 50$, atunci $a = d \cdot x$ şi $b = d \cdot y$, iar $(x, y) = 1$.

Deoarece $[a, b] = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 50^2$ se obține $x \cdot y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 50$ adică$x \cdot y = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \cdot 7^{n_4} \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$, sunt în total 15 factori primi. Evident un factor prim divide doar pe x sau doar pe y deci avem 2^{15} perechi.

3. Determinați toate perechile de numere naturale nenule $(a, b), a \leq b$ pentru care

$$(a, x) \cdot (b, x) = (20, x) \cdot (22, x)$$

pentru orice număr natural nenul x, unde (n, m) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor m şi n.

Baltic Way, 2022

Soluție: Dacă x nu este divizibil cu 2, 5 sau 11 atunci $(20, x) \cdot (22, x) = 1$, deci $(a, x) = (b, x)$ și avem a şi b au ca divizori primi doar 2, 5 sau 11.

Dacă $x = 2$ atunci $(a, 2) \cdot (b, 2) = 4$ deci $a = 2n, b = 2m$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*, n \leq m$.

Dacă $x = 4$ atunci $(2n, 4) \cdot (2m, 4) = 8$ deci $2 \mid n$ şi $2 \nmid m$ sau $2 \nmid n$ şi $2 \mid m$. În plus dacă $x = 8$ atunci $(2n, 8) \cdot (2m, 8) = 4$ deci $4 \nmid m$ şi $4 \nmid m$.

Dacă $x = 5$ atunci $(2n, 5) \cdot (2m, 5) = 5$ deci $5 \mid n$ şi $5 \nmid m$ sau $5 \nmid n$ şi $5 \mid m$. În plus dacă $x = 25$ atunci $(2n, 25) \cdot (2m, 25) = 4$ deci $25 \nmid m$ şi $25 \nmid m$.

Dacă $x = 11$ atunci $(2n, 11) \cdot (2m, 11) = 11$ deci $11 \mid n$ şi $11 \nmid m$ sau $11 \nmid n$ şi $1 \mid m$. În plus dacă $x = 121$ atunci $(2n, 121) \cdot (2m, 121) = 11$ deci $121 \nmid m$ şi $121 \nmid m$.

Deci $n \cdot m = 2 \cdot 5 \cdot 11$ deci $n \in \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$, $n \leq 10$. Deci avem $(a, b) \in \{(2, 220), (4, 110), (10, 44), (20, 22)\}$.

4. Cele $2m$ numere $1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4, \dots,\ 2m \cdot (2m+1)$, unde $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ sunt scrise pe o tablă. O *mutare* presupune ștergerea a trei numere a, b, c de pe tablă și scrierea pe tablă a numărului $\frac{abc}{ab+ac+bc}$. După $m-1$ *mutări* rămân pe tablă doar două numere. Presupunând că unul dintre numere este $\frac{4}{3}$ arătați că celălalt este mai mare ca 4.

Baltic Way, 2019

Soluție: Observăm că $\frac{1}{\frac{abc}{ab+ac+bc}} = \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, deci suma inverselor numerelor scrise pe tablă rămâne constantă, pe care o notăm cu S.

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2m(2m+1)} = 1 - \frac{1}{2m+1}$$

Dacă x este cel de al doilea număr rămas pe tablă avem egalitatea $1 - \frac{1}{2m+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{x}$ de unde $x = 4\frac{2m+1}{2m-3} > 4$.

5. Care este numărul maxim de numere naturale distincte care au suma 2013?

Olimpiadă Moscova, 1998

Soluție: Arătăm mai întâi că numărul maxim nu poate depăși 63. Să presupunem că ar fi posibil ca suma a mai mult de 63 de numere naturale distincte să fie 2013. Atunci suma lor va fi cel puțin

$0 + 1 + 2 + \ldots + 63 = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016 > 2013,$ contradicție. Astfel am demonstrat că putem avea cel mult 63 de numere.

A doua parte constă din a furniza un exemplu care să arate că există 63 de numere naturale distincte cu suma 2013. Considerăm numerele $0,1,2,\ldots,61$ și 122. Suma acestora este $\frac{61 \cdot 62}{2} + 122 = 2013$.

6. Stabiliți care este cel mai mare număr de numere prime care pot fi găsite printre 15 numere naturale consecutive.

Constantin Dragomir, Recreații matematice 3/ 2013

Soluție: Fie numerele consecutive $p,\ p+1,\ p+2, \ldots,\ p+14,\ p \in \mathbb{N}$. Pentru $p \in \{0, 1, 2, 3\}$ se verifică faptul că șirul considerat conține, în fiecare caz, șase numere prime.

Fie $p \geq 4$. Șirul considerat conține cel mult opt numere impare consecutive, dintre care cel puțin două sunt divizibile cu 3 și sunt strict mai mari decât 3. Prin urmare, șirul considerat poate conține cel mult șase numere prime.

În concluzie, cel mai mare număr de numere prime printre 15 numere consecutive este 7. De exemplu, pentru $p = 0$ șirul conține numerele prime 2, 3, 5, 7, 11, 13.

7. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu bază BC. Bisectoarea ∢ABC intersectează latura AC în punctul E, bisectoarea ∢BEC intersectează latura BC în punctul F, bisectoarea ∢EFC intersectează latura AC în punctul G, iar bisectoarea ∢EGF intersectează latura AB în punctul H. Se știe că GH ∥BC.
   a) Demonstrați că GF ∥ AB.
   b) Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Claudiu Militaru, Ploiești

Soluție: Fie $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 2a$. BE este bisectoarea ∢ABC și atunci $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC = a$. Cum GH ‖BC, avem $\sphericalangle AGH = \sphericalangle ACB = 2a$ unghiuri corespondente. Pentru că GH este bisectoarea $\sphericalangle EGF$, avem $\sphericalangle EGH = \sphericalangle HGF = 2a$. Tot din $GH \parallel BC$ avem $\sphericalangle HGF = \sphericalangle GFC = 2a$ unghiuri alterne interne. Atunci, $\sphericalangle GFC = \sphericalangle ABC = 2a$, unghiuri corespondente pentru dreptele AB și GF cu secanta BC.

Din reciproca teoremei paralelelor tăiate de o secantă rezultă că GF ‖ AB. Pentru că FG este bisectoarea $\sphericalangle EFC$, avem $\sphericalangle EFG = \sphericalangle GFC = 2a$. Unghiul $\sphericalangle EFC$ este exterior triunghiului EBF și, cum $\sphericalangle EBF = a$ rezultă că $\sphericalangle BEF = 3a$. EF este bisectoarea $\sphericalangle BEC$ și $\sphericalangle BEF = \sphericalangle FEC = 3a$.

În triunghiul EFG, folosind suma unghiurilor unui triunghi, cum $\sphericalangle EFG = 2a, \sphericalangle FGE = 4a$ și $\sphericalangle GEF = 3a$, avem $9a = 180°$, de unde $a = 20°$.Atunci, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 40°$ și $\sphericalangle BAC = 100°$.

8. Considerăm mulțimea $A = \{1, 2, , 3, \dots, 2017\}$. Determinați numărul submulțimilor $B \subset A$, cu trei elemente, care îndeplinesc , simultan, condițiile:
   a) Cel puțin două elemente din mulțimea B sunt numere naturale consecutive;
   b) Există $a \in B$, pentru care $3a \in B$.

Lucian Dragomir

Soluție: Submulțimile lui A care îndeplinesc condițiile date conțin elementele a și 3a cu 3a$\leq$ 2017, adică a≤ 672.

Dacă a=1, atunci $\{1, 3\} \subset B$ și avem $B = \{1, 2, 3\}$ sau $B = \{1, 3, 4\}$.
Dacă $a \in \{2, 3, \dots, 672\}$, atunci putem avea:
$B_1 = \{a-1, a, 3a\}$ sau $B_2 = \{a, a+1, 3a\}$ sau $B_3 = \{a, 3a-1, 3a\}$ sau $B_4 = \{a, 3a, 3a+1\}$, unde mulțimile B_1, B_2, B_3 și B_4 sunt distincte două câte două. Avem $4 \cdot 671 = 2684$ asemenea submulțimi.
Prin urmare, în total sunt $2684 + 2 = 2686$ de submulțimi B cu proprietățile din enunț.

9. Fie p un număr prim mai mare ca 5 și $S = \{p - n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n^2 < p\}$. Demonstrați că S conține două elemente a și b astfel $1 < a < b$ și a divide pe b.

Baraj Argentina

Soluție: Vom arăta că cel mai mic element al lui S care este mai mare ca 1 divide un element mai mare al lui S. Dacă p este de forma $m^2 + 1$ cu $m \in \mathbb{N}$, arătăm că $p - (m-1)^2 = 2m$ divide $p^2 - 1 = m^2$. Într-adevăr, cum m este par, rezultă $2m \mid m^2$.

Dacă p nu este de forma $m^2 + 1$, el nu este nici de forma $m^2 + 2m$ (acesta este număr compus căci m >1), deci $m^2 + 1 < p < m^2 + 2m$ pentru un anumit $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 2$). Arătăm că $p - m^2$, care este un element mai mare ca 1 al lui S, divide un element mai mare al lui S. Condiția ca $p - m^2$ să dividă un număr de forma $p - n^2$ cu $n \in \{0,1,2, \dots, m-1\}$ este echivalentă cu $p - m^2$ divide unul din numerele $m^2, m^2-1^2, m^2-2^2, \dots, m^2 - (m-1)^2$. Fiind mai mic ca $2m$, $p - m^2$ divide unul din următoarele $2m - 1$ numere cosecutive: $1, 2, \dots, m-1, m, m+1, \dots, 2m-1$, deci una din diferențele $\mathrm{m}^2 - 0^2, \mathrm{m}^2-1^2, \mathrm{m}^2-2^2, \dots, \mathrm{m}^2 - (\mathrm{m}-1)^2$. Rezultă că $p - m^2 = m$, adică $p = m(m+1)$, care înseamnă număr compus. Așadar $p - m^2$ divide unul din următoarele numere: $1, 2, \dots, m-1, m, m+1, \dots, 2m-1$, deci una din diferențele $m^2-1^2, m^2-2^2, \dots, m^2 - (m-1)^2$.

10. În n cutii transparente se introduc bile roșii și bile albastre. Trebuie alese 50 de cutii astfel încât ele să conțină împreună cel puțin jumătate din bilele roșii și cel puțin jumătate din bilele albastre.

Este întotdeauna posibilă o asemenea alegere indiferent de numărul bilelor și de modul în care au fost distribuite în cutii dacă:

a) $n = 100$
b) $n = 99$?

Baraj OBMJ 2018

Soluție:

a) La 100 de cutii: în 25 de cutii pun câte o bilă roșie, iar în celelalte 75 câte o bilă albastră. Pentru a alege cel puțin jumătate din bilele roșii trebuie alese 13 cutii care conțin bile roșii, iar pentru a alege cel puțin jumătate din bilele albastre, trebuie să alegem cel puțin 38 de cutii care conțin bile albastre, deci cel puțin 51 de cutii în total. Prin urmare, dacă avem 100 de cutii, este posibil să nu putem alegem 50 care să conțină cel puțin jumătate din totalul bilelor de fiecare culoare. 1 și 75 cu câte o bilă de culoare 2, trebuie alese cel puțin 13 din primele și 38 din următoarele, adică 51.
b) Notând cu r_i numărul de bile roșii din cutia i, putem presupune fără a restrânge generalizarea că $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_{99}$. Atunci vom alege din cutia 1, apoi dintre cutiile 2 și 3 pe cea care are mai multe bile albastre, dintre cutiile 4 și 5 pe cea care are mai multe bile albastre, ..., dintre cutiile 98 și 99 pe cea care are mai multe bile albastre. Este clar că această alegere îndeplinește condiția din enunț.

11. Dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 1$, arătați că $E = \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(a+c)} + \frac{1}{c^2(b+a)} \geq \frac{3}{2}$.

Etapa locală, Bihor, 2009, prof. D. Drâmbe

Soluție: $abc = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = b^2c^2,\ \frac{1}{b^2} = a^2c^2,\ \frac{1}{c^2} = a^2b^2$.

Atunci $E = \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(a+c)} + \frac{1}{c^2(b+a)} = \frac{b^2c^2}{b+c} + \frac{a^2c^2}{a+c} + \frac{a^2b^2}{a+b}$.

Aplicăm, pentru $n = 3$, inegalitatea Titu Andreescu: $\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \ \ldots\ + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1+x_2+\ \ldots\ +x_n)^2}{a_1+a_2+\ \ldots\ +a_n}$, adevărată oricare ar fi numerele reale $x_1, x, \ldots, x_n$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere reale strict pozitive.

Atunci $E = \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(a+c)} + \frac{1}{c^2(b+a)} = \frac{b^2c^2}{b+c} + \frac{a^2c^2}{a+c} + \frac{a^2b^2}{a+b} \geq \frac{(bc+ac+ab)^2}{b+c+a+c+a+b} = \frac{(ab+ac+bc)^2}{2(a+b+c)}$ (1) Avem $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz \Rightarrow (x + y + z)^2 \geq 3(xy + xz + yz)$.

Luăm $x = ab,\ y = ac,\ z = bc$. Obținem $(ab + ac + bc)^2 \geq 3abc(a + b + c)$, de unde $\frac{(ab+ac+bc)^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{3abc}{2} = \frac{3}{2}$ (2).

Din (1) și (2) obținem inegalitatea dată.

12. Se consideră punctele A, B, C, D coplanare, oricare trei necoliniare și H_1, H_2 ortocentrele triunghiurilor ABC și respectiv ABD. Să se arate că A, B, C, D sunt conciclice dacă și numai dacă $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{CD}$.

Etapa locală, București, 2003, prof. Marian Andronache

Soluție: Într-un triunghi ABC, cu notațiile consacrate și M un punct în plan avem relațiile $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ și $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GO} \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{\overrightarrow{MH}+2\overrightarrow{MO}}{3} \Rightarrow 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{MO} \Rightarrow \Rightarrow$ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{MO}$.
Fie $O,\ O_1$ centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și ABD.

În triunghiurile ABC și ABD, luând $M = O$, obținem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH_1} + 2\overrightarrow{OO} =$
$= \overrightarrow{OH_1}$ și $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH_2} + 2\overrightarrow{OO_1}$.
Din ultimele două egalități obținem $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} + 2\overrightarrow{OO_1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{H_1H_2} + 2\overrightarrow{OO_1}$.
$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OO_1} = \vec{0}$, de unde deducem că punctele A, B, C, D sunt conciclice.

13. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\left[\frac{1}{1+x}\right] = \frac{1}{1+[x]}$. (Gazeta Matematică, Etapa locală 2011)

b) $\left[\frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{1-[x]}$. (Etapa locală, Sibiu, 2011, Prof. Neculai Stanciu)

Soluție: a) $\frac{1}{1+[x]} \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] \in \{-2;\ 0\}$

Dacă $[x] = -2$, atunci $\left[\frac{1}{1+x}\right] = -1$, de unde $x \in [-2, -1)$ și $\frac{1}{1+x} \in [-1, 0)$. Rezultă $x = -2$.
Dacă $[x] = 0$, atunci $\left[\frac{1}{1+x}\right] = 1$, de unde $x \in [0, 1)$ și $\frac{1}{1+x} \in [1, 2)$. Rezultă $x = 0$.
b) $\frac{1}{1-[x]} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 - [x] = 1$ sau $1 - [x] = -1$.
Dacă $1 - [x] = 1$, atunci $\left[\frac{1}{1-x}\right] = 1$, de unde $x \in [0,\ \frac{1}{2})$.
Dacă $1 - [x] = -1$, atunci $\left[\frac{1}{1-x}\right] = -1$, de unde $x \in [2,\ 3)$.
Deci $x \in \left(0-,\ \frac{1}{2}\right] \cup [2,\ 3)$.

CONCURSUL „ION CIOLAC”

Ediția a XXII-a

SUBIECTE

Clasa a IV –a

Problema 1. Se consideră patru numere naturale distincte. Efectuând toate sumele oricăror trei numere distincte dintre cele patru, se obțin sumele 42, 47, 50, 53. Care sunt cele patru numere?

Prof. Irina Barbu, Craiova, Revista Țițeica

Problema 2. Un număr se numește *fericit* dacă are toate cifrele nenule și una dintre cifrele sale este egală cu suma celorlalte cifre. De exemplu, 451 este *fericit* $(5 = 1 + 4)$, dar și 514 este *fericit.*

a) Găsiți cel mai mare număr *fericit* care este cel mult egal cu 2023.

b) Câte numere *fericite* sunt cuprinse între 197 și 300?

Prof. Luminița Popescu, Craiova

Problema 3. În patru cutii sunt în total 1200 piese LEGO. Un copil mută din prima cutie în a doua atâtea piese câte erau în a doua cutie. Apoi mută din a doua cutie în a treia de două ori mai multe piese decât erau în a treia. În final mută din a treia cutie în ultima de trei ori mai multe piese decât erau în a patra. După aceste mutări copilul constată că numărul de piese din cele patru cutii este același. Câte piese LEGO erau la început în fiecare cutie?

Prof. Monica Stanca

Clasa a V–a

Problema 1. Determinați numerele naturale a, b, c, știind că a este un număr prim, $a + b + c = 48$ și $5b + c = 130$.

Gazeta Matematică

Problema 2.

a) Scrieți numărul 43^{2023} ca sumă dintre un pătrat perfect și un cub perfect.

Revista „Țițeica”

b) Stabiliți dacă fracția $\frac{19^{13}}{11^{16}}$ este subunitară, echiunitară sau supraunitară.

Prof. Raluca Ciurcea

Problema 3. Pe o tablă sunt scrise numerele 1,2,3,...,2023. Andrei și Mihai șterg pe rând numerele de pe tablă astfel: mai întâi Andrei șterge numerele de pe locurile impare, apoi Mihai șterge numerele de pe locurile pare din șirul rămas și așa mai departe.

a) Aflați suma numerelor rămase pe tablă după ce Andrei și Mihai șterg fiecare o dată numerele de pe tablă.
b) Care este ultimul număr șters de pe tablă?

Prof. Aurelia Petrică

Clasa a VI –a

Problema 1. Determinați numerele întregi a și b care verifică egalitatea $a \cdot b^2 + 2023 = b^3$.

Monica Stanca, C.N. „Carol I", Craiova

Problema 2. Produsul tuturor divizorilor naturali ai unui număr natural *n* este egal cu $2^{75} \cdot 3^{60}$. Determinați numărul *n*.

Vasile Scurtu, Bistrița, GM 2/2021

Problema 3. Fie *ABC* un triunghi echilateral și *M* simetricul lui *A* față de *B*. Perpendiculara din *A* pe *BC* intersectează dreapta *MC* în *N*. Dacă $MC = 18\ cm$, determinați lungimea segmentului *AN*.

Cristina Spiridon, Craiova, Revista Titeica 2022

Clasa a VII –a

Problema 1 Fie numerele reale $a, b, c \in \{-3,3\}$ cu proprietatea că $a^3bc^2 = -729$.

a) Demonstrați că $|a + b + c| = 3$ și $|ab + bc + ca| = 9$.
b) Rezolvați ecuația $x \cdot (x + a) + b(x + a) = ab + c^2$.

Raluca Ciurcea, Craiova

Problema 2 Fie trapezul *ABCD* cu bazele *AB* și *CD* în care $AB = 2CD$. Fie *M* mijlocul laturii *BC*, iar *P* punctul de intersecție a dreptelor *DM* și *AC*. Demonstrați că:

a) $DP = PM$;

b) dreptele *AC*, paralela prin *D* la *BC* și paralela prin *M* la *AB* sunt drepte concurente.

Nicolaie Tălău, Craiova
Revista Țițeica 2022

Problema 3 Fie numerele naturale m, n care verifică relația $\sqrt{1 + 3^{m+1} + 3n} + \sqrt{2^n + 5m} = 7$.

a) Demonstrați că numărul $2^n + 5m$ este pătrat perfect.
b) Determinați numerele m și n.

Raluca Ciurcea, Craiova

Clasa a VIII –a

Problema 1. Determinați numerele naturale x și y care verifică egalitatea: $13^x + 15 = y^2$.

Prof. Gabriel Tica, Craiova, Revista Țițeica

Problema 2. Determinați numerele reale $x, y, z > 0$ pentru care $x + y + z = 6$ și

$$\max\left\{\frac{x^2}{y+z}, \frac{y^2}{x+z}, \frac{z^2}{x+y}\right\} \leq 1.$$

Prof. Luminița Popescu, Craiova

Problema 3. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu înălțimea $AA' = a$ și punctele M, N și N' pe $BC,\ AB$ și respectiv $A'B'$ astfel încât $CN = DM = C'N' = 2a$. Dacă $\{O\} = DM \cap CN$ atunci $\frac{NO}{NC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculați măsura unghiului format de dreptele DM și $C'N'$.
b) Calculați măsura în grade a unghiului format de planul $(C'DM)$ cu planul bazei (ABC).

Prof. Luminița Popescu, Craiova

Clasa a IX –a

Problema 1. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $abc = 1$. Să se demonstreze că :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+b^2+c^2}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+c^2+a^2}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}+a^2+b^2} \le 1 \le \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2bc}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+2ca}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}+2ab}.$$

Mihai Opincariu , Brad, Gazeta Matematică

Problema 2. Fie funcția $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, cu proprietatea $f(n+p) = f(n+p-1) + 1, \forall n \in \boldsymbol{N}$, iar p este un număr natural fixat. Știind că există $k \in \boldsymbol{N}$ astfel încât $f(k+p-1) = k+p-1$, determinaţi *f(p)*.

Prof. Gabriel Tica, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC, cu $AB \neq AC$, în care D este mijlocul segmentului BC, I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, $DI \cap AB = \{E\}$, $AD \cap EC = \{S\}$.

Dacă $AB = c, AC = b$ și $BC = a$, determinați valoarea raportului $\frac{SC}{SE}$ în funcție de *a*, *b*, *c*.

***

Clasa a X –a

Problema 1. Fie a, b, c numere complexe distincte, cu proprietatea că $|a| = |b| = |c| = 1$. Să se arate că dacă $|a+b-c|^2 + |b+c-a|^2 + |c+a-b|^2 = 12$, atunci a, b, c sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Revista Țițeica

Problema 2. Să se determine soluțiile reale pozitive ale ecuației $log_3(x^2-1) + 5^{x^3-x} = 1 + 125^x$.

Prof. Cristian Schneider, Craiova

Problema 3. Fie $n \ge 2$ un număr natural fixat și numerele reale strict pozitive $x_1, x_2, \cdots x_n$ cu proprietatea că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1$. Să se determine valoarea maximă a sumei:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x_k^n + n \cdot x_k^{n-1}}}$$

Prof. Cătălin Spirodon, Craiova

Clasa a XI –a

Problema 1. Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2\cdot C_n^1+2^2\cdot C_n^2+\cdots+n^2\cdot C_n^n}{1\cdot 2\cdot C_n^1+2\cdot 3\cdot C_n^2+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot C_n^n}\right)^n.$$

Prof. Carmen-Liana Georgescu, Craiova
Matei Tașcău, UK
Revista Titeica 2022

Problema 2. Fie numărul natural $n, n\geq 2$. Demonstrați că, oricare ar fi matricele $X, Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, are loc relația

$$\operatorname{rang}(XY)-\operatorname{rang}(YX)\leq\left[\frac{n}{2}\right].$$

Problema 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât ecuația $f(x)=0$ are soluția unică $x_1=2023$. Demonstrați că există un număr real c pentru care are loc inegalitatea

$$\frac{f'(c)}{f'(c)+f(c)}>1+\frac{c}{2}+\frac{c^2}{6}.$$

Prof. Raluca Ciurcea, Craiova

Clasa a XII –a

Problema 1. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu 35 elemente care are un subgrup H cu 5 elemente cu proprietatea că, oricare ar fi $x\in G, y\in H$, avem $xyx^{-1}\in H$. Arătați că G este ciclic.

Revista Țițeica

Problema 2. Fie $I(x)=\frac{\sqrt{6}}{2}\int_0^x\frac{\sqrt{1-\cos t}}{5+3\cos t}\,dt$, $x\in(0,2\pi)$. Determinaţi $x\in(0,2\pi)$, care satisface egalitatea $\operatorname{tg}\left(I(x)-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$.

Prof. Stăncele Mihaela, Craiova

Problema 3. Fie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ o funcţie continuă, cu proprietatea că $f(x)\cdot f(1-x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$.

a) Calculaţi

$$I=\int_0^1\frac{1}{(4x^2-4x+5)(1+f(x))}\,dx.$$

b) Arătaţi că

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq 1.$$

Prof. Luminița Popescu, Craiova

SOLUȚII

Clasa a IV-a

Problema 1.

Fie a, b, c, d numerele date. Avem $a + b + c = 42$; $b + c + d = 47$; $a + c + d = 50$ și $a + b + d = 53$. Adunând cele 4 egalități membru cu membru obținem $3 \cdot (a + b + c + d) = 192$ și rezultă $a + b + c + d = 64$ şi

$$a = (a + b + c + d) - (b + c + d) = 64 - 47 = 17$$

$$b = (a + b + c + d) - (a + c + d) = 64 - 50 = 14$$

$$c = (a + b + c + d) - (a + b + d) = 64 - 53 = 11$$

$$d = (a + b + c + d) - (a + b + c) = 64 - 42 = 22$$

Problema 2.

a) Toate numerele de la 2000 la 2023 nu sunt *fericite,* deoarece au cifra sutelor zero. Căutăm cel mai mare număr *fericit* de forma $\overline{19ab}$. Trebuie ca *a* și *b* să fie cât mai mari, iar 9 e cea mai mare cifră. Deducem $9 = 1 + a + b$, adică $a + b = 8$.

Cel mai mare număr va avea cifra zecilor cât mai mare, iar *b* este nenulă, deci $a = 7$, $b = 1$ și numărul cerut este 1971.
b) $197 < \overline{abc} < 300$, deci $a = 1$ sau $a = 2$.
Pentru $a = 1$ avem doar numerele 198 și 199, dintre care este *fericit* 198 (9=1+8)
Pentru $a = 2$ avem numerele $\overline{2bc}$ fericite dacă $2 = b + c$ sau $b = 2 + c$ sau $c = 2 + b$
Dacă $2 = b + c$ atunci $b = c = 1$ și este *fericit* numărul 211
Dacă $b = 2 + c$ atunci numerele *fericite* sunt 231, 242, 253, 264, 275, 286, 297
Dacă $c = 2 + b$ atunci numerele *fericite* sunt 213, 224, 235, 246, 257, 268, 279

Problema 3.

Fiecare cutie are în final $1200: 4 = 300$ piese LEGO . Deoarece în ultima cutie s-au pus de trei ori mai multe piese decât erau la început, acolo sunt de 4 ori mai multe piese decât inițial, deci la început erau $300: 4 = 75$ piese.
Din cutia a treia s-au luat $3 \times 75 = 225$ piese (sau $300 - 75 = 225$ piese)
În cutia a treia au fost $300 + 225 = 525$ piese după ce s-au mutat din a doua cutie de două ori mai mute decât au fost inițial în a treia cutie. Prin această mutare s-a triplat numărul de piese din cutia a treia, deci la început au fost $525: 3 = 175$ piese în cutia a treia.
Din cutia a doua s-au luat $2 \times 175 = 350$ piese
În cutia a doua au fost $300 + 350 = 650$ piese după ce s-au mutat din prima cutie în doua câte au fost inițial în a doua cutie. Prin această mutare s-a dublat numărul de piese din cutia a doua, deci la început au fost $650: 2 = 325$ piese în cutia a doua.
Din prima cutie s-au luat 325 piese, deci la început au fost $300 + 325 = 625$ piese în prima cutie

Clasa a V-a

Problema 1.

Deoarece $5b + c = 4b + b + c$, iar $5b + c$ este par deci $b + c$ este par.
Cum $a + b + c$ este par, rezultă că a este par. Dar a este prim, deci $a = 2$.
Deoarece $b + c = 46$ și $5b + c = 130$ rezultă $b = 21$ și $c = 25$.

Problema 2.

a) Observăm că 43=16+27=$4^2 + 3^3$ şi

$$43^{2023} = 43^{6\cdot 337+1} = (43^{337})^6 \cdot 43 = (43^{337\cdot 3} \cdot 4)^2 + (43^{337\cdot 2} \cdot 3)^3$$

Observăm că $19^2 = 361 < 363 = 3 \cdot 11^2$, de unde obținem $19^{14} < 11^{14} \cdot 2187 < 11^{14} \cdot 2200$.
Dar $19^{14} < 11^{15} \cdot 200 < 11^{16} \cdot 19 \Rightarrow 19^{13} < 11^{16}$ și în concluzie fracția este subunitară.

Problema 3.

a) După prima rundă (adică după ce Andrei și Mihai șterg fiecare o dată numerele de pe tablă) rămân pe tablă numerele $2, 6, 10, 14, 18, 22, \dots, 2018, 2022$ *și* $2 + 6 + \dots + 2022 = 512072$.
b) Observăm că al doilea element al șirului din runda k (adică după ce Andrei și Mihai au șters alternativ de $k - 1$ ori numerele de pe tablă) devine primul element din runda $k + 1$, iar diferența dintre două elemente alăturate ale șirului este egală cu $2^{2(k-1)}$.

Al doilea element al șirului la începutul rundei 1 este 2.
Al doilea element al șirului la începutul rundei 2 este $2 + 2^2 = 6$.

Al doilea element al șirului la începutul rundei 3 este $6 + 2^4 = 22$..

Al doilea element al șirului la începutul rundei 4 este $22 + 2^6 = 86$.
Al doilea element al șirului la începutul rundei 5 este $86 + 2^8 = 342$.
Al doilea element al șirului la începutul rundei 6 este $342 + 2^{10} = 1366$. Deoarece $1366 + 2^{12} > 2023$, rezultă că ultimul număr șters este 1366.

Clasa a VI-a

Problema 1.

$b^3 - a \cdot b^2 = 2023 \Leftrightarrow b^2(b - a) = 2023$, iar $2023 = 7 \cdot 17^2$ deci $b^2 \in \{1^2; 17^2\}$.
Pentru $b = 1$ avem $1^2(1 - a) = 2023$ și se obține $a = -2022$.
Pentru $b = -1$ avem $(-1)^2(-1 - a) = 2023$ și se obține $a = -2024$.

Pentru $b = 17$ avem $17^2(17 - a) = 2023$ și se obține $a = 10$.
Pentru $b = -17$ avem $(-17)^2(-17 - a) = 2023$ și se obține $a = -24$.

Problema 2.

Produsul divizorilor lui *n* este $2^{75} \cdot 3^{60}$, deci $n = 2^a \cdot 3^b$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$, iar numărul divizorilor lui *n* este $k = (a + 1)(b + 1)$. Fie $D_n = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ mulțimea divizorilor lui *n.* Atunci $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k = 2^{75} \cdot 3^{60}$ și $\frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{d_k} = 2^{75} \cdot 3^{60}$, deoarece $D_n = \left\{\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \dots, \frac{n}{d_k}\right\}$.

$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k \cdot \frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{d_k} = (2^{75} \cdot 3^{60})^2$, de unde $n^k = 2^{150} \cdot 3^{120}$

$(2^a \cdot 3^b)^{(a+1)(b+1)} = 2^{150} \cdot 3^{120}$, deci $a(a + 1)(b + 1) = 150$ și $b(a + 1)(b + 1) = 120$
Împărțind ultimele două relații rezultă $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$, de unde $a = \frac{5b}{4}$ și înlocuind mai sus obținem

$b\left(\frac{5b}{4}+1\right)(b+1)=120 \Leftrightarrow b(5b+4)(b+1)=480$, de unde $b=4$ și numărul căutat este $n=2^5\cdot 3^4$

Problema 3.

ΔABC echilateral și $AN\perp BC$, deci $(AN$ bisectoarea $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle NAC=\sphericalangle NAB=30°$
ΔABC echilateral, $\sphericalangle MBC=180°-60°=120°$, iar M simetricul lui A față de B, deci $MB=AB=BC$ și rezultă ΔMBC isoscel, $\sphericalangle BMC=\sphericalangle BCM=(180°-120°):2=30°$.
$\sphericalangle ACN=\sphericalangle ACB+\sphericalangle BCM=60°+30°=90°$ și $\sphericalangle NAC=30°$, de unde $AN=2\cdot NC$
$\sphericalangle AMN=\sphericalangle NAM=30°$ și rezultă ΔAMN isoscel, $MN=AN=2\cdot NC$ și $MC=MN+NC=3\cdot NC$, dar $MC=18\ cm$, deci $NC=6\ cm$ și $AN=12\ cm$

Clasa a VII-a

Problema 1.

a) $a^2=c^2=9$, și ,cum $a^3bc^2=-729$, rezultă $ab=-9$. Deoarece $a,b\in\{-3,3\}$ deducem că $a+b=0$. Prin urmare $|a+b+c|=|c|=3$ și $|ab+bc+ca|=|ab|=9$

b) Prin calcul ecuația devine $x^2+ax+bx+ab=c^2+ab$. Ținând cont că $a+b=0, c^2=9$, ecuația devine $x^2=9$. De aici $x\in\{-3,3\}$, care verifică relația.

Problema 2.

a) Fie N mijlocul segmentului $[AB]$ și Q punctul de intersecție a dreptelor DN și AC.
MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $MN \parallel AC$, de unde $MN \parallel QPAB = 2CD$, deci $AN=DC$. Cum $AN\parallel DC$, deducem că patrulaterul $ANCD$ este paralelogram, deci Q este mijloc pentru segmentele $[DN]$, $[AC$În triunghiul DMN, $QP\parallel MN$, Q este mijlocul lui $[DN]$, deci QP este linie mijlocie și $DP = PM$ Din $BN=DC$, $BN\parallel DC$ rezultă $BNDC$ paralelogram. De aici $DN\parallel BC$.
Dar QM este linie mijlocie în triunghiul CAB, deci $QM\parallel AB$.
Dreptele AC, paralela prin D la BC și paralela prin M la AB se identifică astfel cu dreptele AC, DN și MQ, concurente. în Q.

Problema 3.

a) Fie $1+3^{m+1}+3n=a\in\mathbb{N}^*, 2^n+5m=b\in\mathbb{N}^*$. Relația dată devine $\sqrt{a}+\sqrt{b}=7$. De aici, $\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\cdot(49-a-b)\in\mathbb{Q}$. Înmulțind relația inițială cu $\sqrt{b}$ obținem $\sqrt{b}=\frac{1}{7}\cdot\left(\sqrt{ab}+b\right)\in\mathbb{Q}_+^*$. De aici rezultă că există numerele naturale nenule, prime între ele, astfel încât $b=p^2/q^2$ și cum b este un număr natural nenul, rezultă $q=1$ și $b=p^2, p\in\mathbb{N}^*$.

b) Ca mai sus deducem că $a=t^2, t\in\mathbb{N}^*$ și $p+t=7$. Studiind cazurile $(p,t)\in\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, adică $(2^n+5m, 1+3^{m+1}+3n)\in\{(1,36),(4,25),(9,16),(16,9),(25,4),(36,1)\}$, obținem soluția unică $m=1, n=2$

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Dacă x este număr impar atunci ultima cifră a lui 13^x este 3 sau 7 și ultima cifra a lui 13^x+15 este 8 sau 2 deci ecuația nu are soluții. Dacă x este număr par atunci $x=2n, n\in\mathbb{N}$ și $15=(y-13^n)(y+13^n)$. Deoarece $y-13^n< y+13^n$ avem cazurile : $y-13^n=1, y+13^n=15$ și $y-13^n=3$ și $y-13^n=5$. Dacă $y-13^n=1, y+13^n=15$ atunci obținem $y=8$ și $13^n=7$ deci nu avem soluții naturale. Dacă $y-13^n=3, y+13^n=5$ atunci obținem $y=4$ și $n=0$ deci $x=0$ soluție.

Problema 2.

Din relația $\max\left\{\frac{x^2}{y+z}, \frac{y^2}{x+z}, \frac{z^2}{x+y}\right\} \leq 1$ obținem $\frac{x^2}{y+z} \leq 1,\ \frac{y^2}{x+z} \leq 1,\ \frac{z^2}{x+y} \leq 1$ de unde avem $x^2 \leq y+z, y^2 \leq x+z, z^2 \leq x+y$. Însumând cele trei relații avem $x^2+y^2+z^2 \leq 12$. Dar $3(x^2+y^2+z^2) = (x+y+z)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ de unde obținem $36 \geq 6^2 + (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ deci $x=y=z$ și $x=y=z=2$.

Problema 3.

a) Deoarece $NN'C'C$ este dreptunghi obținem $C'N' \parallel CN$ și de aici măsura unghiului dintre dreptele $C'N'$ și DM este egală cu măsura unghiului dintre dreptele CN și DM. Deoarece $\Delta DCM \equiv \Delta CBN$ avem $\widehat{CDM} \equiv \widehat{NCB}$ de unde obținem $DM \perp CN$ și $(\widehat{C'N', DM}) = 90°$.
b) Deoarece $CO \perp DM$ aplicând teorema celor 3 perpendiculare obținem $C'O \perp DM$ deci măsura unghiului dintre planele (ABC) și $(C'DM)$ este măsura $\widehat{C'OC}$
În dreptunghiul $NCC'N'$ avem $NN' = CC' = 2a$ și $NO = a\sqrt{3}$ de unde obținem $N'O = N'C' = 2a$ și triunghiul $N'C'O$ este isoscel de bază OC', deci $d(C', N'O) = d(O, N'C') = a$.
Din $d(C', N'O) = d(C', OC)$ obținem $(OC'$ bisectoarea unghiului $\widehat{CON'}$. In triunghiul $NN'O$, dreptunghic în N avem $\sin(\widehat{NON'}) = \frac{1}{2}$ deci $\widehat{NON'} = 30°$ și $\widehat{C'OC} = \frac{180°-30°}{2} = 75°$.

Clasa a IX-a

Problema 1.

$(b+c)^2 \leq 2(b^2+c^2) \Rightarrow b^2+c^2 \geq (b+c)\cdot\frac{(b+c)}{2} \geq (b+c)\sqrt{bc}$ de unde

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+b^2+c^2} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+(b+c)\sqrt{bc}} = \frac{a}{a+(b+c)\sqrt{abc}} = \frac{a}{a+b+c}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2bc} = \frac{a}{a+2bc\sqrt{a}} = \frac{a}{a+2\sqrt{abc}\cdot\sqrt{bc}} = \frac{a}{a+2\sqrt{bc}} \geq \frac{a}{a+b+c}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+b^2+c^2} \leq \frac{a}{a+b+c} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2bc}$$

Problema 2.

În relația din enunț înlocuim *n* cu *k* şi obținem:$f(k+p) = k+p$. Demonstrăm prin inducție matematică că $f(n+p) = n+p,\ \forall n \in \boldsymbol{N},\ n \geq k$.
Considerăm mulțimea $A = \{n \in \boldsymbol{N} | f(n+p) \neq n+p\}$. Conform celor demonstrate anterior, mulțimea *A* este finită. Fie *m* cel mai mare element al mulțimii *A*. Atunci $f(m+p) \neq m+p$.
Dar $f(m+p+1) = f(m+p)+1 \neq m+p+1$. Deci, $m+1 \in A$, contradicţie cu maximalitatea lui *m*.Rezultă că mulțimea *A* este vidă,deci $f(n+p) = n+p,\ \forall n \in \boldsymbol{N}$, de unde rezultă că $f(p) = p$

Problema 3.

$\overrightarrow{r_I} = \frac{a\overrightarrow{r_A}+b\overrightarrow{r_B}+c\overrightarrow{r_C}}{a+b+c},\ \overrightarrow{r_D} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C})$. Dacă $\frac{AE}{AB} = k$, atunci $\overrightarrow{DE} = (1-k)\overrightarrow{DA} + k\overrightarrow{DB} = (1-k)\overrightarrow{r_A} + \left(k-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{r_B} - \frac{1}{2}\overrightarrow{r_C}$. $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{r_I} - \overrightarrow{r_D} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{r_A} + \left(\frac{b}{a+b+c}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{r_B} + \left(\frac{c}{a+b+c}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{r_C}$. $\overrightarrow{DE}$ și $\overrightarrow{DI}$ sunt coliniari, deci $\frac{(1-k)(a+b+c)}{a} = \frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2(a+b+c)}{b-a-c}$, $k = \frac{b-c}{a+b-c}$.
Din teorema lui Menalaus în ΔBEC, transversală A-S-D rezultă: $\frac{DB}{DC}\cdot\frac{SC}{SE}\cdot\frac{AE}{AB} = 1$ şi $\frac{SC}{SE} = \frac{AB}{AE} = \frac{a+b-c}{b-c}$.

Clasa a X-a

Problema 1.

Fie $A(a), B(b)$ și $C(c)$. Deoarece $|a| = |b| = |c| = 1$, obținem că punctele $A(a), B(b)$ și $C(c)$ aparțin cercului cu centrul în O și rază 1. În reperul cartezian cu originea în O ortocentrul triunghiului ABC este $H(a+b+c)$.

$|a+b-c|^2 = (a+b-c)(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}) = 3 + a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{a}-\bar{c}) - c(\bar{a}+\bar{b})$

$|b+c-a|^2 = (b+c-a)(\bar{b}+\bar{c}-\bar{a}) = 3 + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{b}-\bar{a}) - a(\bar{b}+\bar{c})$

$$|c+a-b|^2 = (c+a-b)(\bar{c}+\bar{a}-\bar{b}) = 3 + c(\bar{a}-\bar{b}) + a(\bar{c}-\bar{b}) - b(\bar{c}+\bar{a})$$

Prin sumare, obținem că $|a+b-c|^2 + |b+c-a|^2 + |c+a-b|^2 = 9 - c(\bar{a}+\bar{b}) - a(\bar{b}+\bar{c}) - b(\bar{c}+\bar{a}) = 12 - (a+b+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$.Folosind relația din ipoteză, obținem $|a+b+c|^2 = (a+b+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) = 0$, deci $a+b+c = 0 \Longrightarrow H = O$, de unde avem triunghiul ABC este echilateral.

Problema 2.

Adunăm $log_3 x$ și obținem: $log_3 x + log_3(x^2-1) + 5^{x^3-x} = log_3 x + log_3 3 + 5^{3x}$ adică $\log_3(x^3 - x) + 5^{x^3-x} = log_3 3x + 5^{3x}$ (*) . Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = log_3 t + 5^t$.

Se arată că funcția este strict crescătoare, deci injectivă. Relația (*) devine $f(x^3 - x) = f(3x)$.
Atunci $x^3 - x = 3x \Rightarrow x^3 - 4x = 0$. Obținem valorile $x_1 = 0 \notin (0,\infty)$, $x_2 = -2 \notin (0,\infty)$ și soluția $x_3 = 2 \in (0,\infty)$

Problema 3.

Notând $\frac{1}{x_k} = a_k,\ k = \overline{1,n}$ obținem $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ și $a_k > 0,\ k = \overline{1,n}$. Suma devine $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x_k^n + n\cdot x_k^{n-1}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt[n]{1+n\cdot a_k}}$. Deoarece funcția $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$ este concavă, conform inegalității Jensen obținem că: $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt[n]{1+n\cdot a_k}} = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot f\left(\frac{1}{1+n\cdot a_k}\right) \le f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+n\cdot a_k}\right) = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+n\cdot a_k}}$.

Funcția $g: (0,\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{1+n\cdot x}$ este concavă pentru orice $n \ge 2$ deoarece $g(x) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{1+n\cdot x}\right)$
Folosind inegalitatea Jensen, avem că:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+n\cdot a_k} = \sum_{k=1}^{n} g(a_k) \le n \cdot g\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}\right) = n \cdot g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Deci, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x_k^n + n\cdot x_k^{n-1}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt[n]{1+n\cdot a_k}} \le \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ de unde deducem că maximul sumei $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x_k^n + n\cdot x_k^{n-1}}}$ este $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ care se obține pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_n = n$.

Clasa a XI-a

Problema 1.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot n \cdot C_{n-1}^{k-1} = n \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1+1) \cdot C_{n-1}^{k-1} =$$

$$n \cdot (n-1) \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} + n \cdot \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1} = n \cdot (n+1) \cdot 2^{n-2}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k+1)\cdot C_n^k=\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot C_n^k+\sum_{k=1}^{n} k\cdot C_n^k=n\cdot(n+1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}=$$

$$=n\cdot(n+3)\cdot 2^{n-2}$$

Înlocuind, limita de calculat devine $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+3}\right)^n=e^{-2}$.

Problema 2.

Deoarece $\operatorname{rang}(XY)\le\min\{\operatorname{rang}(X),\operatorname{rang}(Y)\}\le\frac{\operatorname{rang}(X)+\operatorname{rang}(Y)}{2}$ şi $\operatorname{rang}(YX)\ge\operatorname{rang}(X)+\operatorname{rang}(Y)-n$ (Sylvester) atunci $\operatorname{rang}(XY)-\operatorname{rang}(YX)\le n-\frac{\operatorname{rang}(X)+\operatorname{rang}(Y)}{2}$.
Pe de altă parte $\operatorname{rang}(XY)-\operatorname{rang}(YX)\le\operatorname{rang}(XY)\le\frac{\operatorname{rang}(X)+\operatorname{rang}(Y)}{2}$. Adunând, deducem că $2(\operatorname{rang}(XY)-\operatorname{rang}(YX))\le n,$ de unde $\operatorname{rang}(XY)-\operatorname{rang}(YX)\le\frac{n}{2}<\left[\frac{n}{2}\right]+1$. Ținând cont că $\operatorname{rang}(XY)-\operatorname{rang}(YX)$ este un număr întreg, rezultă concluzia.

Problema 3.

Definim $g:[0,2023]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(e^x-x-1)\cdot f(x)$, derivabilă, deci funcție Rolle pe $[0,2023]$. În plus, $g(0)=g(2023)=0$. Conform teoremei lui Rolle există $c\in(0,2023)$ astfel încât $g'(c)=0$, de unde $(e^c-c-1)\cdot f'(c)+(e^c-1)\cdot f(c)=0$. Relația se scrie echivalent $(e^c-1)\cdot\big(f(c)+f'(c)\big)=c\cdot f'(c)$. Observăm că dacă $f(c)+f'(c)=0$, atunci $f'(c)=0$, deci $f(c)=0, c\neq 2023$, fals!. Putem scrie așadar $\frac{f\prime(c)}{f(c)+f\prime(c)}=\frac{e^c-1}{c}$ (1).
Fie $h:[0,\infty)\to\mathbb{R}, h(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$. Cum $h'''(x)=e^x-1>0$ pe $(0,\infty)$, deducem că funcția h'' este strict crescătoare, deci $h''(x)>h''(0)=0$ pentru $x>0$. Prin urmare funcția h' este strict crescătoare, deci $h'(x)>h'(0)=0$ pentru $x>0$. De aici funcția h este strict crescătoare, deci $h(x)>h(0)=0$ pentru $x>0$. Rezultă deci că $e^c>1+c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{6}$, echivalent cu $\frac{e^c-1}{c}>1+\frac{c}{2}+\frac{c^2}{6}$pentru $c>0$ (2) .
Din relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{f'(c)}{f'(c)+f(c)}>1+\frac{c}{2}+\frac{c^2}{6}$.

Clasa a XII-a

Problema 1.

$Ord(H)=5$ deci H este ciclic şi $H=\{e,h,h^2,h^3,h^4\}$. Din Teorema lui Cauchy există un $g\in G$ pentru care $ord(g)=7$. În plus există $n\in\{1,2,3,4\}$ pentru care $ghg^{-1}=h^n$. Dacă $ghg^{-1}=e$ atunci se obţine h =e ceea ce este imposibil. Din $ghg^{-1}=h^n$ se obţine $g^2hg^{-2}=gh^ng^{-1}$şi $(ghg^{-1})^n=h^{n^2}$ adică $g^2hg^{-2}=h^{n^2}$. Iterând se obţine $h=g^7hg^{-7}=h^{n^7}$şi $n^7\equiv 1\ (mod\ 5)$. Dar $n^4\equiv 1\ (mod\ 5)$ deci n=1 şi $ghg^{-1}=h$, de unde $gh=hg$.

Avem $(gh)^{35}=g^{35}h^{35}=e$, $(gh)^7=h^2\neq e$, iar $(gh)^5=g^5\neq e$, deci $ord(gh)=35$ şi G este grup ciclic.

Problema 2.

$I(x)=\frac{\sqrt{6}}{2}\int_0^x \frac{\sqrt{1-\cos t}}{5+3\cos t}\,dt\;=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^x \frac{\sin\frac{t}{2}}{1+3\cos^2\frac{t}{2}}\,dt$. Făcând schimbarea de variabilă $u(t)=\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}=z$ obţinem $I(x)=-\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}}\frac{1}{1+z^2}\,dz\;=\frac{\pi}{3}-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}\right)$.

$\operatorname{tg}\left(I(x)-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{3}{2}$ de obţinem $\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=-\frac{3}{2}$ adică $\cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{x}{2}\in(0,\pi)$ de unde $x=\frac{4\pi}{3}$.

Problema 3.

a) Facem schimbarea de variabilă $u(x)=1-x=t$ şi obţinem

$$I=-\int_1^0\frac{1}{(4(1-t)^2-4(1-t)+5)\big(1+f(1-t)\big)}dt=\int_0^1\frac{1}{(4t^2-4t+5)\left(1+\frac{1}{f(t)}\right)}dt$$

$$I=\int_0^1\frac{f(x)}{(4x^2-4x+5)\big(1+f(x)\big)}dx.$$

Avem

$$2I=\int_0^1\frac{1+f(x)}{(4x^2-4x+5)(1+f(x))}dx=\int_0^1\frac{1}{(2x-1)^2+4}dx.$$

Dar $\int_0^1\frac{1}{(2x-1)^2+4}dx\;=\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}$, deci $I=\frac{1}{4}arctg\frac{1}{2}$

b) Facem schimbarea de variabilă $u(x)=1-x=t$ şi obţinem $\int_0^1 f(x)\,dx\;=-\int_1^0 f(1-x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx$.

Deci

$$2\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)dx\;\geq\int_0^1 2\,dx=2$$

De unde obţinem $\int_0^1 f(x)\,dx\geq 1$.

PROBLEME REZOLVATE DIN NUMĂRUL TRECUT AL REVISTEI

Clasa a IV-a

1. În două coșuri erau 37 de ouă. După ce din primul coș se iau 5 ouă, iar din al doilea se scot 12 ouă, în cele două coșuri rămân numere egale de ouă. Câte ouă erau în fiecare coș la început ?

Prof. Bogdan Ecaterina, prof. C.N„Carol I” Craiova

Soluție (Popescu Dragoș, elev C.N. „Carol I” Craiova)

Observăm că numărul de ouă din cele două coșuri este inegal, la început, dar se egalează după ce se scot din fiecare un anumit număr de ouă. Reprezentăm, așadar, numărul de ouă din fiecare coș, la final și înainte de a se scoate ouăle.

Final

Coș 1

Coș 2

Inițial

Coș 1 + 5 ouă

Coș 2 + 12 ouă

37 ouă

Observăm că $2p+5+12=37$

$2p = 37 - 5 - 12$
$2p = 20$
$p = 10$ ouă (atâtea ouă au rămas în final, în fiecare coș)
$10 + 5 = 15$ ouă au fost inițial în primul coș
$10 + 12 = 22$ ouă au fost inițial în al doilea coș

2. Trei numere naturale consecutive se împart pe rând la un număr de 2 cifre, iar suma celor 3 resturi obținute este 103.Care este cel mai mare dintre cele 3 resturi ?

Soluție (Grigorie Eva Miruna, elev C.N. „Carol I” Craiova)

Fie $\overline{ab}$ numărul de două cifre cu care se împart cele 3 numere și x cel mai mic dintre cele trei numere. Dacă niciunul dintre numerele $x, x+1$ și $x+2$ nu se împart exact cu $\overline{ab}$ atunci din teorema împărțirii cu rest avem $x = \overline{ab} \times c + r$, $x+1 = \overline{ab} \times c + r + 1$, $x+2 = \overline{ab} \times c + r + 2$, iar suma celor trei resturi este $r + r + 1 + r + 2 = 103$ deci $3 \times r = 100$ imposibil. Deci unul dintre numere se împarte exact cu $\overline{ab}$.

Dacă x se împarte exact cu $\overline{ab}$ atunci $x = \overline{ab} \times c$, $x+1 = \overline{ab} \times c + 1$, $x+2 = \overline{ab} \times c + 2$ iar suma resturilor este 3, imposibil.

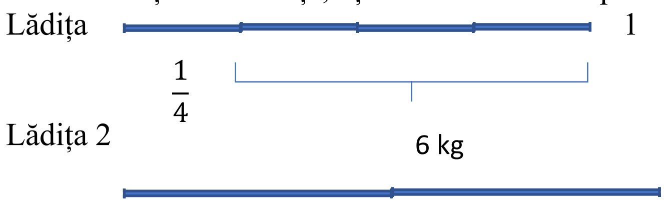
Dacă $x+1$ se împarte exact cu $\overline{ab}$ atunci $x = \overline{ab} \times c + \overline{ab} - 1$, $x+1 = \overline{ab} \times (c+1)$, $x+2 = \overline{ab} \times (c+1) + 1$ iar suma resturilor este $\overline{ab} = 103$, imposibil.

Dacă $x+2$ se împarte exact cu $\overline{ab}$ atunci $x = \overline{ab} \times c + \overline{ab} - 2$, $x+1 = \overline{ab} \times c + \overline{ab} - 1$, $x+2 = \overline{ab} \times (c+1)$ iar suma resturilor este $2 \times \overline{ab} - 3 = 103$, deci $2 \times \overline{ab} = 106$, ar $\overline{ab} = 53$ și cel mai mare dintre resturi este 52.

3. În două lădițe erau cantități diferite de cireșe. După ce din prima lădiță s-a vândut un sfert din cantitate, au mai rămas 6 kg, iar după ce s-a vândut jumătate din a doua lădiță, au mai rămas în ea 8 kg. Câte kilograme de cireșe au fost la început în cele două lădițe la un loc ?

Soluție (Vârtosu Ana, elev C.N. „Carol I” Craiova)

Reprezentăm cantitățile din lădițe, așa cum ni le indică problema



Observăm că trei sferturi din cantitatea din prima lădiță reprezintă 6 kg, deci, un sfert reprezintă $6 : 3 = 2kg$ și întreaga cantitate $2 \, x \, 4 = 8 \, kg$ de cireșe au fost la început în prima lădiță.

Observăm că jumătate din cantitatea din a doua lădiță reprezintă 8 kg, deci la început în a doua lădiță au fost $8 \, x \, 2 = 16 \, kg$ cireșe și $8 \, kg + 16 \, kg = 24 \, kg$ de cireșe au fost în total, la început, în cele 2 lădițe.

4. Un tată are de 5 ori vârsta fiicei sale, iar peste 10 ani va fi de trei ori mai în vârstă decât ea. Câți ani are fiecare ?

Soluție (Oanță Raissa, elev C.N. „Carol I” Craiova)

Notăm Vârsta Tatălui = T și Vârsta Fiicei = F și avem relațiile $T = 5F$ și $T + 10 = (F + 10) \times 3$.

Înlocuim pe T în prima relație și obținem $5F + 10 = 3F + 30$, deci $5F - 3F = 30 - 10$ adică $2F = 20 \, ani$ și $F = 10 \, ani$, iar $T = 10 \, x \, 5 = 50 \, ani$.

5. Să se calculeze suma $a + b + c$, știind că $a + b = 30, a + c + c = 160$, iar $c + b = 80$.

Soluție (Pătrană Aylin, elev C.N. „Carol I” Craiova)

Din $(c+b)-(a+b) = 80-30$ se obţine $c+b-a-b = 50$ adică $c-a = 50$, deci $c = a+50$ şi $a+a+50+a+50 = 160$ şi rezultă $a+a+a = 60$, de unde $a = 20$, i ar $a+b+c = 20+80 = 100$.

Clasa a V-a

1. Un număr natural se numește *superpar* dacă suma dintre număr și răsturnatul său are toate cifrele pare.
a) Câte numere *superpare* de două cifre sunt?
b) Câte numere *superpare* cu 2022 cifre sunt?

Prof. Luminița Popescu, Craiova

Soluție: *(Radu Grigorie, elev C.N.„Carol I” Craiova):*

a) Dacă $\overline{ab}$ este un număr *superpar* atunci $\overline{ab}+\overline{ba}$ este un număr format doar din cifre pare și cum $\overline{ab}+\overline{ba} \leq 198$ obținem $\overline{ab}+\overline{ba} \leq 88 \Leftrightarrow 11(a+b) \leq 88 \Leftrightarrow a+b \leq 8$.

Dacă $a+b=2 \Rightarrow \overline{ab} \in \{11\}$
Dacă $a+b=4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{31,22,13\}$
Dacă $a+b=6 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51,42,33,24,15\}$
Dacă $a+b=8 \Rightarrow \overline{ab} \in \{71,62,53,44,35,26,17\}$.
În total avem 16 de numere.

b) Dacă $\overline{a_1a_2 \dots a_{2022}}$ este un număr *superpar* atunci $\overline{a_1a_2 \dots a_{2022}} + \overline{a_{2022}a_{2021} \dots a_1}$ este un număr format doar din cifre pare.

Dacă sumele a_1+a_{2022}, a_2+a_{2021}, ..., $a_{1011}+a_{1012}$ sunt toate cel mult 9 și sunt numere pare, atunci $\overline{a_1a_2 \dots a_{2022}}$ este *superpar*. Perechea (a_1, a_{2022}) poate fi aleasă în 16 variante, iar celelalte 1010 grupe în 25 de variante (deoarece oricare dintre cifre poate fi 0). În total sunt deci $20 \cdot 25^{1010}$ numere.

Dacă $a_1+a_{2022} \geq 10$, deoarece $a_1+a_{2022} \leq 18$, rezultă că suma ar începe cu 1 și nu ar mai avea toate cifrele pare, ceea ce nu convine.

Fie (a_i, a_{2023-i}) prima grupă pentru care avem $a_i+a_{2023-i} \geq 10$ (avem trecere peste ordin). Adunând de la dreapta la stânga avem:

$$a_{2022}+a_1 \leq 8 \text{ și este cifră pară}$$
$$a_{2021}+a_2 \leq 8 \text{ și este cifră pară}$$
$$\vdots$$
$$a_{2024-i}+a_{i-1} \leq 8 \text{ și este cifră pară}$$
$$18 \geq a_{2023-i}+a_i \geq 10 \text{ are cifra unităților pară}$$
$$\vdots$$
$$18 \geq a_i+a_{2023-i} \geq 10 \text{ are cifra unităților pară}$$
$$1+a_{i-1}+a_{2024-i} \text{ este număr impar}$$

Prin urmare numărul nu va fi *superpar,* deci rămân $20 \cdot 25^{1010}$ numere *superpare* cu 2022 cifre.

2. Se consideră numărul $p = \frac{9^{100}-1}{8}$.
a) Arătați că *p* este număr natural.
b) Aflați ultima cifră a lui *p*.
c) Determinați paritatea cifrei zecilor numărului *p*.

Prof. Ionuț Ivănescu, Craiova

Soluție: *(Luca Firănescu, elev C.N.„Carol I” Craiova):*

a) $9^{100} = (8+1)^{100} = M_8+1$, deci $9^{100}-1 = M_8$ și deducem că *p* este număr natural.

b) $9^{100} = (9^2)^{50} = 81^{50} = (80+1)^{50} = M_{80} + 1$, deci $9^{100} - 1 = M_{80}$ și rezultă $p \vdots 10$, adică ultima cifră a lui *p* este 0.
c) $9^{100} = (9^4)^{25} = 6561^{25} = (32 \cdot 205 + 1)^{25} = M_{32} + 1$, deci $9^{100} - 1 = M_{32}$ și rezultă $p \vdots 4$. Dar ultima cifră a lui *p* este 0 și conform criteriului de divizibilitate cu 4, ultimele două cifre ale lui *p* pot fi doar 00, 20, 40, 60, 80, ceea ce înseamnă că numărul *p* are cifra zecilor pară.

3. Dacă numerele naturale nenule a, b, c verifică relația $47a + 48b + 49c = 2022$ atunci

$$a + b + c = 2022.$$

Prof. Luminița Popescu, Craiova

Soluție: *(Sebastian Mirea, elev C.N.„Carol I” Craiova):*

$2022 = 47a + 48b + 49c > 47(a+b+c)$, deci $a + b + c < 44$
$2022 = 47a + 48b + 49c < 49(a+b+c)$, deci $a + b + c > 41$
Obținem $a + b + c = 42$ sau $a + b + c = 43$.
Dacă $a + b + c = 43$ obținem

$$47(a+b+c) + b + 2c = 2022,$$

Adică $b + 2c = 1$, deci $c = 0$, imposibil. În concluzie, $a + b + c = 42$.
4. Determinați numărul de cifre ale numărului 2^{60}.

Prof. Ionuț Ivănescu, Craiova

Soluție: *(Sebastian Doran, elev C.N.„Carol I” Craiova):*

$2^{10} > 10^3$, deci $2^{60} > 10^{18}$ și rezultă că 2^{60} are mai mult de 18 cifre.
Arătăm că $2^{60} < 10^{19}$. Această inegalitate este echivalentă cu $2^{60} < 2^{19} \cdot 5^{19} \Leftrightarrow 2^{41} < 5^{19}$.
Dar $2^{41} = 2^{39} \cdot 2^2 = 2^{39} \cdot 4 < 2^{39} \cdot 5$ și $5^{19} = 5^{18} \cdot 5$ și observăm că este suficient să arătăm că $2^{39} < 5^{18}$. Avem $2^{39} = (2^{13})^3 = 8192^3 < 15625^3 = (5^6)^3 = 5^{18}$, ceea ce arătă că este adevărată inegalitatea $2^{60} < 10^{19}$. În concluzie, 2^{60} are 19 cifre.

5. Un număr natural se numește *interesant* dacă se poate scrie ca sumă a trei divizori diferiți ai lui.
a) Demonstrați că 2022 este un număr interesant.
b) Demonstrați că orice număr interesant este divizibil cu 6.

Giulia Armășelu, elevă C.N. „Carol I” Craiova

Soluție: *(Sofia Şchiplescu, elev C.N.„Carol I” Craiova):*

a) $2022 = 6 \cdot 337 = 337 \cdot (1 + 2 + 3) = 337 + 674 + 1011$
b) Dacă *n* este un număr *interesant*, atunci $n = d_1 + d_2 + d_3 = \frac{n}{d_4} + \frac{n}{d_5} + \frac{n}{d_6}$, unde $d_1, d_2, \dots, d_6$ sunt divizori ai lui *n*. Rezultă atunci $1 = \frac{1}{d_4} + \frac{1}{d_5} + \frac{1}{d_6}$.

Considerăm $d_4 < d_5 < d_6$. Evident, $d_4 > 1$.

- Dacă $d_4 = 3$ rezultă $\frac{1}{d_4} + \frac{1}{d_5} + \frac{1}{d_6} \le \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < 1$, imposibil.
- Dacă $d_4 = 2$ și $d_5 > 3$ rezultă $\frac{1}{d_4} + \frac{1}{d_5} + \frac{1}{d_6} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < 1$, imposibil.
- Prin urmare, $d_4 = 2$ și $d_5 = 3$. Atunci $\frac{1}{d_6} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ și rezultă că $d_6 = 6$ este un divizor al lui n.

Clasa a VI-a

1. a) Să se arate că numerele naturale de două cifre au maxim 12 divizori naturali.

b) Să se determine $\overline{abc}$ cu $b = a + c$ știind că are un număr maxim de divizori naturali.

Prof. Aurelia Petrică, Craiova

Soluție: *(Alexandru Ion, elev C.N.„Carol I” Craiova):*

a) Consideram $\overline{ab} = {p_1}^{e_1} \cdot {p_2}^{e_2} \cdot {p_3}^{e_3} \cdot \ldots \cdot {p_n}^{e_n}$, cu $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_n$ numere prime, n, $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 > \overline{ab}$, rezultă că $n < 4$.

Dacă $\overline{ab} = {p_1}^{e_1}$, e_1 maxim dacă şi numai p_1 este minim. Deoarece $100 < 2^7$rezultă $\overline{ab}$ are cel mult 7 divizori.

Dacă $\overline{ab} = {p_1}^{e_1} \cdot {p_2}^{e_2}$, pentru a avea un număr maxim de divizori trebuie ca $p_1 = 2, p_3 = 3$ şi $e_1 > e_1$. Deoarece $2^5 \cdot 3 < 100 < 2^6 \cdot 3$ rezultă $\overline{ab}$ are cel mult 12 divizori.

Dacă $\overline{ab} = {p_1}^{e_1} \cdot {p_2}^{e} \cdot {p_3}^{e_3}$, pentru a avea un număr maxim de divizori trebuie ca $p_1 = 2, p_3 = 3$ şi $p_3 = 5$. Deoarece $2^2 \cdot 3 \cdot 5 < 100 < 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ se obține că puterea maximă este 2 şi $\overline{ab}$ are cel mult 12 divizori.

În concluzie, numerele naturale de două cifre au maxim 12 divizori naturali.

b) $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 11(10a + c) = 11 \cdot \overline{ac}$.

Dacă $11 \nmid \overline{ac}$ atunci $\overline{abc}$ are un număr maxim de divizori naturali dacă și numai dacă $\overline{ac}$ are un număr maxim de divizori naturali. Numerele de două cifre care au număr maxim de divizori naturali sunt 60, 72, 90 și 96. Deoarece $\overline{abc} = 11 \cdot \overline{ac} < 1000$, numerele căutate sunt 660, 792 și 990 şi au fiecare 24 de divizori.

Dacă $\overline{ac} = 11k$ atunci $k < 9$ şi are cel mult 4 divizori şi $\overline{abc}$ are cel mult 8 divizori deci mai puţin de 24.

2. Fie șirul de numere raționale $a_1, a_2, \ldots, a_n, n \in \mathbb{N}^*$, cu proprietatea că $a_1 = 2$ și a_n este media aritmetică a numerelor a_{n-1} și 2022 pentru $n \geq 2$. Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai șirului de numere raționale.

a) Calculați a_2 și a_3.
b) Arătați că ultima cifră a numărului $S_{2022} + a_{2022}$ este 6.

Prof. Mirea Mihaela Mioara, *(enunț modificat)*

Soluție: *(Alexandru Dicu, elev C.N.„Carol I” Craiova):*

a) $a_2 = \frac{a_1+2022}{2} = 1012$, $a_3 = \frac{a_2+2022}{2} = 1517$.

b) $2 \cdot a_1 = 4$

$2 \cdot a_2 = a_1 + 2022$

$2 \cdot a_3 = a_2 + 2022$

……………………………..

$2 \cdot a_{2022} = a_{2021} + 2022$

Însumăm relațiile de mai sus și vom obține $2 \cdot S_{2022} = 4 + S_{2021} + 2021 \cdot 2022$

$S_{2022} - S_{2021} = a_{2022}$

$S_{2022} + a_{2022} = 4 + 2021 \cdot 2022$

Deci, $u(S_{2022} + a_{2022}) = u(4 + 2021 \cdot 2022) = 6$.

3. Să se determine numărul $\overline{abc}$, a, b, c distincte, știind că $\overline{ab}$ și $\overline{bc}$ sunt invers proporționale cu $b + c$ și $a + b$.

Nițu Mihai, elev C.N.„Carol I” Craiova

Soluție: *(Călin Popescu, elev C.N.„Carol I” Craiova):*

Observăm că $\overline{ab} \cdot (b+c) = \overline{bc} \cdot (a+b)$ echivalent cu $(10a+b)(b+c) = (10b+c)(a+b)$ adică $10ab + 10ac + b^2 + bc = 10ba + 10b^2 + ac + ab \Leftrightarrow b^2 = ac$. Cum $b^2 = ac$, a, b, c cifre distincte, obținem $\overline{abc} \in \{124, 139, 248, 421, 469, 842, 931, 964\}$.

4. Dacă x și $x+2$ sunt numere prime mai mari decât 3, să se găsească cel puțin doi divizori proprii ai numărului $x+7$.

Prof. Aurelia Petrică, Craiova

Soluție: *(Natalia Vlagiu, elev C.N.„Carol I" Craiova)*

Dacă x și $x+2$ sunt numere prime mai mari decât 3 atunci sunt impare deci x este număr impar și $x+7$ este număr par deci divizibil cu 2. În plus x nu este multiplu de 3, deci poate fi de forma $3k+1$ sau $3k+2$.

Dacă $x = 3k+1$ atunci $x+2 = 3k+3 \vdots 3$ ceea ce este imposibil, deoarece $x+2$ este un număr prim mai mare ca 3.

Dacă $x = 3k+2$ atunci $x+7 = 3k+9 \vdots 3$, deci doi divizori proprii ai numărului $x+7$ sunt 2 și 3.

5. Fie ΔABC cu $AB = 2\ cm$ și $CD = 3\ cm$ mediana corespunzătoare. Aflați perimetrul triunghiului știind că acesta se exprimă printr-un număr întreg.

Prof. Aurelia Petrică, Craiova, (*enunț modificat*)

Soluție: *(Eduard Criveanu, elev C.N.„Carol I" Craiova):*

Deoarece $P_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = 2 + AC + BC$ se exprimă printr-un număr întreg, rezultă că $AC + BC$ se exprimă printr-un număr întreg. Fie E simetricul lui C față de D. Atunci $CE = 2CD = 6\ cm$. Observăm că ΔADC ≡ ΔBDE (cazul L.U.L.), de unde obținem AC≡ BE. În triunghiul BEC, avem $BC + BE > CE \Rightarrow BC + AC > 6$. În triunghiul ADC, avem $AC < CD + AD = 3 + 1 = 4$. Analog , $BC < CD + BC = 3 + 1 = 4$. Obținem $6 < AC + BC < 8$, de unde $BC + AC = 7$. În concluzie, $P_{\Delta ABC} = 9\ cm$.

Clasa a VII-a

1. Fie a, b, c, d numere raționale pozitive , astfel încât $\frac{2022}{a+7} + \frac{2022}{b+8} + \frac{2022}{c+9} + \frac{2022}{d+10} = 2021$. Calculați $\frac{a+6}{a+7} + \frac{b+7}{b+8} + \frac{c+8}{c+9} + \frac{d+9}{d+10}$.

Prof. Delia Schneider, Craiova

Soluție: *(Rareș Ciobanu, elev C.N.„Carol I", Craiova)*

Din relația $\frac{2022}{a+7} + \frac{2022}{b+8} + \frac{2022}{c+9} + \frac{2022}{d+10} = 2021$ se obține $\frac{1}{a+7} + \frac{1}{b+8} + \frac{1}{c+9} + \frac{1}{d+10} = \frac{2021}{2022}$. În plus $\frac{a+6}{a+7} + \frac{b+7}{b+8} + \frac{c+8}{c+9} + \frac{d+9}{d+10} = \frac{a+7-1}{a+7} + \frac{b+8-1}{b+8} + \frac{c+9-1}{c+9} + \frac{d+10-1}{d+10}$

$$= 4 - \left(\frac{1}{a+7} + \frac{1}{b+8} + \frac{1}{c+9} + \frac{1}{d+10}\right) = \frac{6067}{2022}.$$

2. Câte triplete (x, y, z), $x, y, z > 0$ și $\sqrt{\overline{x,yz(x)} + \overline{y,zx(y)} + \overline{z,xy(z)}} \in \mathbb{Q}$ există?

Prof. Popa Elena, Baia de Fier

Soluție: *(Erik Preda, elev C.N.„Carol I", Craiova)*

$\sqrt{\overline{x,yz(x)}+\overline{y,zx(y)}+\overline{z,xy(z)}} = \sqrt{\frac{\overline{xyzx}-\overline{xyz}}{900}+\frac{\overline{yzxy}-\overline{yzx}}{900}+\frac{\overline{zxyz}-\overline{zxy}}{900}} = \sqrt{\frac{1000(x+y+z)}{900}}$
$=\frac{1}{3}\sqrt{10(x+y+z)} \in \mathbb{Q}$ deci $x+y+z=10k^2$, dar $3 \le x+y+x \le 24$ de unde obținem $x+y+z=10$.

Dar $10=1+1+8=1+2+7=1+3+6=1+4+5=2+2+6=2+3+5=2+4+4=3+3+4$. O scriere cu 3 cifre diferite generează 6 triplete iar una cu 2 cifre egale 3 triplete diferite, în total $4\cdot 6+4\cdot 3=36$ triplete.

3. Să se afle numărul natural $\overline{abc}$ astfel încât $\sqrt{1+3+5+\cdots+\overline{abc}}=\overline{cba}$

Prof. Popa Elena, Baia de Fier

Soluție: *(Bucătaru Bogdan, elev C.N.„Carol I”, Craiova)*

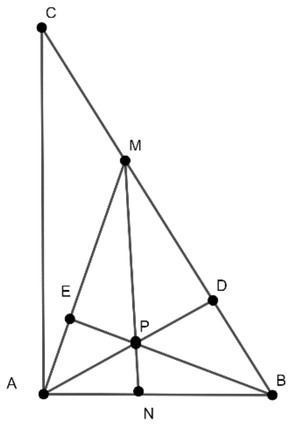
$\sqrt{1+3+5+\cdots+\overline{abc}}=\frac{\overline{abc}+1}{2}=\overline{cba}$ de unde avem $\overline{abc}+1=2\overline{cba}(1)$. Deci c este cifra impară mai mica decât 5.
Dacă $c=1$ arunci (1) devine 98 $a=10b+198$ adică 49 $a=5b+99$ de unde avem $99\le 49a\le 144$ adică $2<a<3$ deci nu avem soluții.
Dacă $c=3$ arunci (1) devine 98 $a=10b+596$ adică 49 $a=5b+298$ de unde avem $298\le 49a\le 343$ adică $6<a<8$ deci $a=7$ și $b=9$ deci $\overline{abc}=973$.

4. In triunghiul ABC, dreptunghic în A, punctul D este piciorul înălțimii corespunzătoare laturii BC. Punctele M si P sunt mijloacele segmentelor DC, respectiv AD. Demonstrați că dreptele AM şi BP sunt perpendiculare.

Prof. Nicolae Tălău , Craiova

Soluție: *(Grigorie Ana, elev C.N.„Carol I”, Craiova)*

Fie $\{E\}=AM\cap BP$și $\{N\}=MP\cap AB$. In triunghiul ADC, MP este linie mijlocie, deci MP∥AC de unde se obține MN⊥AB şi P este ortocentrul triunghiului ABM deci BP înălțime și BP⊥AB.



5. Fie trapezul ABCD cu bazele AB și CD în care $AB=2\ CD$. Fie M mijlocul laturii BC, iar punctul de intersectie a dreptelor DM și AC. Demonstrați că :
a) $DP=PM$
b) dreapta AC, paralela prin D la BC și paralela prin M la AB sunt drepte concurente.

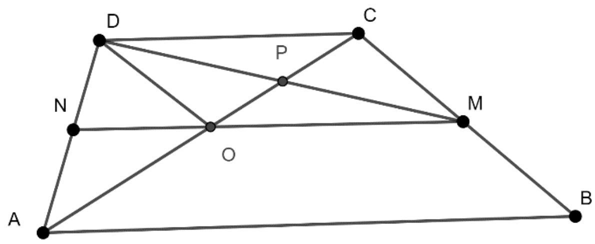
Prof. Nicolae Tălău , Craiova

Soluție: *(Marinescu Merina, elev C.N.„Carol I”, Craiova)*

a) Fie MN linia mijlocie a trapezului şi $\{O\}=MN\cap AC$. În triunghiul ABC OM este linie mijlocie deci $OM \parallel AB \parallel CD$ și $OM=\frac{AB}{2}=DC$ de unde avem $OMCD$ paralelogram şi $DM\cap AC=\{P\}$, P mijlocul lui DM deci $PM=DP$.

b) Deoarece $OMCD$ paralelogram rezultă $DO \parallel BC$, deci

AC, paralela prin D la BC și paralela prin M la AB sunt concurente în O.



Clasa a VIII-a

1. Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $x + y + z = 3$. Arătați că:

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \leq \frac{6}{xy+yz+zx}.$$

În ce caz avem egalitate?

Prof. Goiceanu Dorina, Prof. Dascălu Simona, Craiova

Soluție: *(Țăndăreanu Yanis, elev C.N.„Carol I”, Craiova)*

Inegalitatea devine:

$$\frac{xy+yz+zx}{x+y} + \frac{xy+yz+zx}{x+z} + \frac{xy+yz+zx}{y+z} \leq 6$$

adică

$$\frac{xy}{x+y} + z + \frac{xz}{x+z} + y + \frac{yz}{y+z} + x \leq 6 \quad (1)$$

de unde

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{yz}{y+z} \leq 3.$$

Cum $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{2}$ cu egalitate pentru $x = y$, $\frac{yz}{y+z} \leq \frac{y+z}{2}$ cu egalitate pentru $y = z$, $\frac{xz}{x+z} \leq \frac{x+z}{2}$ cu egalitate pentru $x = z$, prin adunare obținem (1). Egalitate avem pentru $x = y = z = 1$.

2. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x - y = 1$. Aflați cea mai mică valoare a expresiei $E(x, y) = x^3 - y^3 - xy$ precum și valorile lui *x* și *y* pentru care se obține acest minim.

Elevă Viespescu Carina Maria, Craiova

Soluție: *(Pintilie David, elev C.N.„Carol I”, Craiova)*

$\mathrm{E}(x, y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - xy = x^2 + y^2 = (y+1)^2 + y^2 = 2y^2 + 2y + 1 = 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$.

Cea mai mică valoare este $\frac{1}{2}$, care se obține pentru $y = -\frac{1}{2}$ și $x = \frac{1}{2}$.

3. Rezolvați ecuația: $\left[\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{x}{6} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{x}{8} + \frac{1}{2}\right] = 3$, unde *x* este un număr real.

Prof. Sebastian Ilinca, Pârșcoveni, Olt

Soluție: *(Găvănescu Iustin, elev C.N.„Carol I”, Craiova)*

Dacă $x \leq 0$ atunci $\left[\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{x}{6} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{x}{8} + \frac{1}{2}\right] \leq 3\left[\frac{1}{2}\right] = 0$.

Dacă $x > 0$, atunci $\left[\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right] \geq \left[\frac{x}{6} + \frac{1}{2}\right] \geq \left[\frac{x}{8} + \frac{1}{2}\right] \geq 0$ și vom avea cazurile:

1. $\left[\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right] = 2$, $\left[\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right] = 1$, $\left[\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right] = 0$. În acest caz nu avem soluții.
2. $\left[\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right] = 3$, $\left[\frac{x}{6} + \frac{1}{2}\right] = 0$, $\left[\frac{x}{8} + \frac{1}{2}\right] = 0$. Nici aici nu obținem soluții.
3. $\left[\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right] = 1$, $\left[\frac{x}{6} + \frac{1}{2}\right] = 1$, $\left[\frac{x}{8} + \frac{1}{2}\right] = 1$.

   Rezultă: $\left[\frac{x+2}{4}\right] = \left[\frac{x+3}{6}\right] = \left[\frac{x+4}{8}\right] = 1 \Longrightarrow 1 \leq \frac{x+2}{4} < 2,\ \ 1 \leq \frac{x+3}{6} < 2,\ \ 1 \leq \frac{x+4}{6} < 2 \ \Longrightarrow x \in [2,6) \cap [3,9) \cap [2,8) \Longrightarrow x \epsilon [3,6)$.

4. Fie $\lambda > 0$. Să se demonstreze că $\frac{(\lambda x^2+y^2)(\lambda y^2+x^2)}{xy} \geq (\lambda^2 + 1)xy + \lambda(x^2 + y^2), \forall x, y > 0$.

Prof. Neculai Stanciu, Buzău

Soluție: *(Ciulu Ioana, elev C.N.„Carol I”, Craiova*)

Inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$\lambda(x^4 + y^4) + (\lambda^2 + 1)x^2y^2 \geq (\lambda^2 + 1)x^2y^2 + \lambda xy(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 \geq xy(x^2 + y^2) \Leftrightarrow (x^3 - y^3)(x - y) \geq 0, \text{ adevărată.}$$

5. Arătați că pentru orice număr natural $n > 12$ există un triunghi pitagoreic a cărui arie se află în intervalul $[n, 2n]$ (Analogie la *Postulatul lui Bertrand* care, afirmă că pentru $n > 1$, în intervalul $(n, 2n)$ există cel puțin un număr prim).

Prof. Neculai Stanciu, Buzău

Soluție: *(In Raluca, elev C.N.„Carol I”, Craiova*)

Dacă un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor $3k$ și $4k$ atunci aria este $A = 6k^2$.
Deoarece $\frac{6(k+1)^2}{6k^2} < 2 \Rightarrow k > 2$, avem că:pentru $\forall n \in [6k^2, 6(k + 1)^2 - 1] \cap \mathbb{N}$, numărul $6(k + 1)^2 \in [n, 2n]$. De exemplu: dacă $n \in [54,95] \cap \mathbb{N} \Rightarrow 96 \in [n, 2n]$, dacă $n \in [96,149] \cap \mathbb{N} \Rightarrow 150 \in [n, 2n]$.

Pentru a completa demonstrația observăm că:

- Dacă $n \in \{13, 14, \dots, 23\} \Rightarrow 24 \in [n, 2n]$, ex.triunghiul cu laturile (6,8,10);
- Dacă $n \in \{24, 25, \dots, 29\} \Rightarrow 30 \in [n, 2n]$, ex.triunghiul cu laturile (5,12,13);
- Dacă $n \in \{30, 31, \dots, 53\} \Rightarrow 54 \in [n, 2n]$, ex.triunghiul cu laturile (9,12,15).

Clasa a IX-a

1. Fie numerele $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 3$. Demonstrați că:

$$\frac{a}{b(3b+c)} + \frac{b}{c(3c+a)} + \frac{c}{a(3a+c)} \geq \frac{3}{4}.$$

Elev Corneliu Gunescu, Craiova

Soluție: *(Rebecca Pitru, elev C.N. „Carol I” Craiova)*

Aplicăm inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică.

$$\frac{a}{b(3b+c)} + \frac{b}{c(3c+a)} + \frac{c}{a(3a+c)} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{abc(3b+c)(3c+a)(3a+b)}} = \frac{3}{\sqrt[3]{(3b+c)(3c+a)(3a+b)}} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{(3b+c)(3c+a)(3a+b)} \leq \frac{(3b+c)+(3c+a)+(3a+b)}{3} = \frac{4(a+b+c)}{3} = \frac{4\cdot 3}{3} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(3b+c)(3c+a)(3a+b)}} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt[3]{(3b+c)(3c+a)(3a+b)}} \geq \frac{3}{4} \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă inegalitatea cerută.

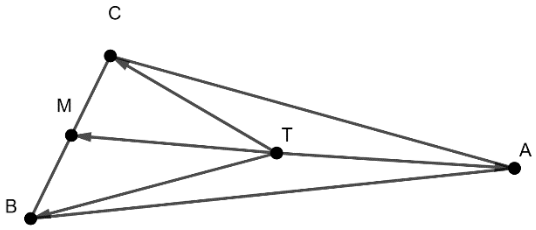
2. Fie T un punct situat în interiorul triunghiului ABC astfel încât $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + 4 \cdot \overrightarrow{TC} = \vec{0}$.

Demonstrați că: $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Prof. Cătălin Cristea, Craiova

Soluție: *(Rebecca Pitru, elev C.N. „Carol I” Craiova)*

Fie M mijlocul laturii (AB).



Avem $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+4\cdot\overrightarrow{TC}=\vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{TM}+4\overrightarrow{TC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{TM}=-2\overrightarrow{TC} \Rightarrow T, M, C$ sunt coliniare.

Atunci $\overrightarrow{AT}=\frac{\overrightarrow{AM}-(-2)\cdot\overrightarrow{AC}}{1-(-2)}=\frac{\overrightarrow{AM}+2\cdot\overrightarrow{AC}}{3}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}}{3}=\frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$.

3. Fie numerele $x, y, z > 0$. Demonstrați că:

$$\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}\le\frac{3}{4}.$$

Elev Corneliu Gunescu, Craiova

Soluție: *(Rebecca Pitru, elev C.N. „Carol I” Craiova)*

Notăm $2x+y+z=a,\ x+2y+z=b, x+y+2z=c$. Adunând cele trei relații obținem $x+y+z=\frac{a+b+c}{4}$. (*)

Scăzând pe rând relația (*) din cele trei relații de mai sus, obținem: $x=\frac{3a-b-c}{4}, y=\frac{3b-a-c}{4}$, $z=\frac{3c-a-b}{4}$.

Înlocuind în inegalitatea din enunț obținem:

$$\frac{3a-b-c}{4a}+\frac{3b-a-c}{4b}+\frac{3c-a-b}{4c}\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow 3-\frac{b}{a}-\frac{c}{a}+3-\frac{a}{b}-\frac{c}{b}+3-\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\le 3 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 6\le\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$, adevărat deoarece dacă $x, y > 0$, avem $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$.

4. Fie numerele $x, y, z > 0$ cu proprietatea $6x + 12y + 7z = 23$. Arătați că $2x^3 + 3y^4 + z^7 \ge 4$.

Prof. Cezar Ozunu, Danețí

Soluție: (*Bianca Seler*, *elev C.N. „Carol I” Craiova)*

Aplicând inegalitatea mediilor obținem

$\frac{2x^3+2+2}{3}\ge 2x$ de unde $2x^3+4\ge 6x$

$\frac{3y^4+3+3+3}{4}\ge 3y$ de unde $3y^4+9\ge 12y$

$\frac{z^7+1+1+1+1+1+1}{7}\ge z$ de unde $z^7+6\ge 7z$. Însumând relațiile obținem $x^3 + 3y^4 + z^7+19\ge 6x+12y+7z$ de unde se obține inegalitatea cerută.

5. Dacă $a, b, c, d > 0$ și $a + b + c + d = 12$, atunci: $a\sqrt{b+c+d}+b\sqrt{c+d+a}+c\sqrt{d+a+b}+d\sqrt{a+b+c}\le 36$.

Prof. Cristian Paul Moanță, Craiova

Soluție: *(Ștefan Preda, elev C.N. „Carol I” Craiova)*

Aplicând inegalitatea Cauchy-Bunoakovski-Schwarz obţinem

$$\left(\sqrt{a}\sqrt{a(b+c+d)}+\sqrt{b}\sqrt{b(c+d+a)}+\sqrt{c}\sqrt{c(d+a+b)}+\sqrt{d}\sqrt{d(a+b+c)}\right)^2 \leq$$

$$(a+b+c+d)\big(a(12-a)+b(12-b)+c(12-c)+d(12-d)\big)$$

$$=12\big(144-(a^2+b^2+c^2+d^2)\big)\ (1)$$

Dar $4(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq (a+b+c+d)^2 = 144$ de unde $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 36$ şi din (1) obținem $a\sqrt{b+c+d}+b\sqrt{c+d+a}+c\sqrt{d+a+b}+d\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{12 \cdot 108} = 36$.

Clasa a X-a

1. Rezolvați ecuația: $\sqrt{\sqrt{2}+2\sin x}-\sqrt{\sqrt{2}-2\sin x}=2\sqrt[4]{2}\sin x$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluție: (*Drăgancea Ștefania Irina, Piran Cosmin Gabriel, elevi C.N.„Carol I”, Craiova*)

Ridicând la pătrat relația dată obținem $2\sqrt{2}-2\sqrt{2-4\sin^2 x}=4\sqrt{2}\sin^2 x$, de unde $2\sqrt{2}(1-2\sin^2 x)=2\sqrt{2}\sqrt{1-2\sin^2 x}$. Rezultă că $1-2\sin^2 x \in \{0,1\}$, deci $\sin x \in \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2},0\right\}$, care verifică ecuația inițială, $x \in \left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile:
   a) $x^4-4x^3+6x^2+8x-16=0$.
   b) $x^4+12x-5=0$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluție: (*Amzoiu Izabela, Mihai Ovidiu, elevi C.N.„Carol I”, Craiova*)

a) Cu notația $x-1=t$, ecuația de la punctul a) al problemei devine $t^4+12t-5=0$. Scriem $t^4+4t^2+4-(4t^2-12t+9)=0$, apoi $(t^2+2)^2-(2t-3)^2=0$. Obținem $t^4+12t-5=(t^2+2t-1)(t^2-2t+5)=0$. Atunci $t \in \{-1\pm\sqrt{2},1\pm 2\cdot i\}$ și $x \in \{\pm\sqrt{2},2\pm 2\cdot i\}$.

b) Ca mai sus, $x \in \{-1\pm\sqrt{2},1\pm 2\cdot i\}$.

3. Fie $x,y,z \geq 0$ astfel încât $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+(xyz)^3=4$. Atătați că $x^2+y^2+z^2 \geq 3$ și precizați cazul de egalitate.

Liviu Smarandache și Răzvan Drînceanu, Craiova

Soluție: (*Ungureanu Lorin Dimitrie, Constantinescu David, elevi C.N.„Carol I”, Craiova*)

Din relația dată de problemă observăm că cel mult una dintre cele trei variabile poate fi 0, altfel am obține $0 = 4$. Considerând $x = 0$, obținem $y^2z^2 = 4$, deci $yz = 2$. Atunci $x^2 + y^2 + z^2 = y^2 + z^2 \geq 2yz = 4 > 3$, deci inegalitatea este adevărată, fără posibilitatea realizării cazului de egalitate.

Pentru $x, y, z > 0$ notăm $p = xyz$. Folosind relația dată și inegalitatea mediilor avem $4 \geq 3p^{\frac{2}{3}} + p^3$. Observăm că dacă $p > 1$, am avea $3p^{\frac{2}{3}} + p^3 > 4$, fals! Prin urmare $p \leq 1$, deci $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 4 - (xyz)^3 = 4 - p^3 \geq 3$. Atunci $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geq 9$, de unde $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$. Egalitatea se realizează dacă avem egalitate în toate inegalitățile folosite pe parcursul rezolvării, ceea ce se întâmplă dacă și numai dacă $x = y = z = 1$.

4. Fie $a, b, c > 0$. Să se arate că

$$a + b + c + \frac{3}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Iuliana Trașcă, Slatina

Soluție: (*Tudor Andreea Daiana, Lungu Ștefan, elevi C.N. „Carol I”, Craiova*)

Folosind inegalitatea mediilor numerelor pozitive $\frac{a+b+c}{2}, \frac{a+b+c}{2}, \frac{3}{ab+bc+ca}$ obținem

$$\frac{a + b + c + \frac{3}{ab + bc + ca}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{3(a + b + c)^2}{4(ab + bc + ca)}}.$$

Din binecunoscuta inegalitate $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$, deducem că

$$a + b + c + \frac{3}{ab+bc+ca} \geq 3\sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

5. Fie $a, b, c > -1$. Să se arate că

$$(a + b + c + 3)^2 \leq (a + b + c + 6)[(a + 1)^2 + (b + 1)^2 + (c + 1)^2].$$

Daniel Alexandru Ion, *Craiova*

Soluție: (*Găman Radu Mihnea, Drăgancea Ștefania Irina, elevi C.N.„Carol I”, Craiova*)
Observăm că, în condițiile problemei, $a + b + c + 6 > 3$. Atunci

$$(a + b + c + 6)[(a + 1)^2 + (b + 1)^2 + (c + 1)^2] > 3[(a + 1)^2 + (b + 1)^2 + (c + 1)^2].$$

Folosind inegalitatea Cauchy Buniacovski Schwarz avem

$$(1 + 1 + 1)[(a + 1)^2 + (b + 1)^2 + (c + 1)^2] \geq (a + 1 + b + 1 + c + 1)^2.$$

De aici, concluzia este imediată.

Clasa a XI-a

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$ și $C = A \cdot B \cdot A^{-1}$. Calculați C^n.

Stud. Enescu Andrei, U.K.

Soluție: (*Vîrtosu Alexandra*, *elev C.N. „Carol I”, Craiova*)

Deoarece $\det(A) = 1 \Longrightarrow A$ inversabilă și $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Fie $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ și $Q = (a \quad b \quad c)$. Atunci $B = P \cdot Q$ și $QP = a + 2b + 3c$.

Avem: $B^n = (PQ)^n = P(QP)^{n-1}Q = (a + 2b + 3c)^{n-1}B \Longrightarrow C^n = (A \cdot B \cdot A^{-1})^n = AB^nA^{-1} =$
$= (a + 2b + 3c)^{n-1}\, A \cdot B \cdot A^{-1} = (a + 2b + 3c)^{n-1}\, C$=$(a + 2b +$
$3c)^{n-1} \begin{pmatrix} 6a & 6a - 6b & 6c - 6b \\ 5a & 5b - 5a & 5c - 5b \\ 3a & 3b - 3a & 3c - 3a \end{pmatrix}$.

2. Fie $f\colon \mathbb{R}\backslash\{a\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^n}{x-a}$. Calculați derivata de ordin $n - 1$ a funcției f $\ (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.

Prof. Dumitrescu Sorin, Craiova

Soluție: (*Costache Mihai*, *elev C.N. „Carol I”, Craiova*)

Avem $f(x) = \frac{x^n}{x-a} = \frac{x^n - a^n}{x-a} + \frac{a^n}{x-a} = x^{n-1} + x^{n-2} \cdot a + \cdots + a^{n-1} + \frac{a^n}{x-a} \Longrightarrow$

$f^{(n-1)}(x) = (n-1)! + a^n \cdot \left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n-1)} = (n-1)! + a^n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(x-a)^n}$.

3. Rezolvați ecuația $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x + 1) + 3$ unde f este o funcție de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, care verifică $f''(x) - 7f'(x) + 10f(x) = 0, (\forall)x \in \mathbb{R},\ f(0) = 3, f'(0) = 12$.

Prof. Dr. Rădulescu Teodora Liliana , Craiova

Soluție: (*Vîrtosu Alexandra, elev C.N. „Carol I”, Craiova*)

$$f''(x) - 7f'(x) + 10f(x) = 0 \Longleftrightarrow [f''(x) - 5f'(x)] - 2[f'(x) - 5f(x)] = 0.$$

Fie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f'(x) - 5f(x) \Longrightarrow g'(x) - 2g(x) = 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.

Înmulțind relația anterioară cu e^{-2x} obținem că $\left(e^{-2x} \cdot g(x)\right)' = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow g(x) = c \cdot e^{2x}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ unde c este o constantă reală.

Avem că $f'(x) - 5f(x) = c \cdot e^{2x}, (\forall)x \in \mathbb{R}$ de unde pentru $x = 0$, obținem că $c = -3$.

Deci, $f'(x) - 5f(x) = -3 \cdot e^{2x}$ și pri înmulțire cu e^{-5x} obținem că $\left(e^{-5x} \cdot f(x)\right)' = (\ e^{-3x})' \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f(x) = e^{2x} + c \cdot e^{5x}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ unde c este o constantă reală.

Pentru $x = 0$, obținem că $c = 2 \Longrightarrow f(x) = e^{2x} + 2 \cdot e^{5x}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$..

Obținem ecuația $e^{2x} + 2 \cdot e^{5x} = \log_{\frac{1}{2}}(2x + 1) + 3 \Longrightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$.

Observăm că ecuația are soluția unică $x = 0$ deoarece $f(x) = e^{2x} + 2 \cdot e^{5x}$ este strict crescătoare iar funcția $h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x + 1) + 3$ este strict descrescătoare.

4. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{n+1}{n} + \frac{1}{n!}, n \geq 1$.

Calculați $\lim_{n\to\infty}(x_n - ne + n)$.

Prof. Dr. Rădulescu Teodora Liliana , Craiova

Soluție: (*Costache Mihai, elev C.N. „Carol I”, Craiova*)

Împărțind relația de recurență cu $n+1$ obținem că $\frac{x_{n+1}}{n+1} = \frac{x_n}{n} + \frac{1}{(n+1)!} \Longrightarrow$

$\frac{x_{n+1}}{n+1} - \frac{x_n}{n} = \frac{1}{(n+1)!}$ și prin sumarea acestor relații deducem că $\frac{x_n}{n} = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ de unde avem că $x_n = n(c_n - 1)$ unde $c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ este șirul lui Euler și $\lim_{n\to\infty} c_n = e$.

Obținem $\lim_{n\to\infty}(x_n - ne + n) = \lim_{n\to\infty} n(c_n - e) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n - e}{\frac{1}{n}}$ și folosind Lema Stolz-Cesaro pentru cazul $\frac{0}{0}$ avem: $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n - e}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1} - c_n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{(n-1)!} = 0$.

5. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale definit prin: $x_1 > 1, x_{n+1} = x_n \cdot e^{x_n}, (\forall) n \geq 1$.

   a) Calculați $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{n}$

   b) Fie $y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Calculați $\lim_{n\to\infty} y_n$.

Prof. Dr. Rădulescu Teodora Liliana , Craiova

Soluție: (*Vîrtosu Alexandra, elev C.N. „Carol I”, Craiova*)

a) Arătăm inductiv că : $x_n > 1, (\forall) n \geq 1$.

Etapa de verificare este evidentă.

Presupunem că $x_k > 1 \Longrightarrow x_{k+1} = x_k \cdot e^{x_k} > 1$ și deci, $x_n > 1, (\forall) n \geq 1$.

Avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{x_n} > 1 \Longrightarrow$ șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

Presupunem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit $\Longrightarrow$ șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și are limită finită, l mai mare sau egală ca 1. Trecând la limită în relația de recurență, obținem că $l = l \cdot e^l \Longrightarrow l = 0$ ceea ce este fals.

Deci, $(x_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit de unde vem că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Folosind Lema Stolz-Cesaro pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_{n+1} - \ln x_n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \ln e^{x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

b) Deoarece $x_n > 1, (\forall) n \geq 1 \Longrightarrow y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n > n$de unde rezultă că $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$

Clasa a XII-a

1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $e^{f(x)} + f(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$. Arătați că $\int_1^{e+1} f(x)dx \leq \frac{3}{2}$.

Mihaela Mirea și *Mihaela Dăianu*, Craiova

Soluție: (*Ciutureanu Vlad, Albu Alexandru, elevi C.N.„Carol I”, Craiova*)

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=e^x+x$ este strict crescătoare, inversabilă. Inegalitatea data poate fi scrisă ca $g(f(x))\le g(g^{-1}(x)), \forall x\in\mathbb{R}$, de unde deducem că $f(x)\le g^{-1}(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Prin urmare $\int_1^{e+1} f(x)dx \le \int_1^{e+1} g^{-1}(x)dx$ (1). Cu schimbarea de variabilă $x=g(t)$ obținem $\int_1^{e+1} g^{-1}(x)dx = \int_0^1 t\cdot g'(t)dt = t\cdot g(t)|_0^1 - \int_0^1 g(t)dt = e+1-e+1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Ținând cont și de relația (1), obținem $\int_1^{e+1} f(x)dx \le \frac{3}{2}$.

2. Dacă $b>a>0$, demonstrați inegalitatea $b^2\cdot e^{\frac{a}{b}} < a^2\cdot e^{\frac{b}{a}}$.

Gilena Dobrică și *Meda Iacob*, Bechet

Soluție: (*Oporanu Iulia, Roșca Andrei, elevi C.N.„Carol I”, Craiova*)

Fie funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$, derivabilă, cu $g':(0,\infty)\to\mathbb{R}, g'(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^2>0$, pentru $x\ne 1$, $g'(1)=0$. Prin urmare g este strict crescătoare, deci pentru $x=\frac{b}{a}>1$ vom avea $g\left(\frac{b}{a}\right)>g(1)=0$. Atunci $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}>\ln\left(\frac{b}{a}\right)^2$, de unde $e^{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}>\left(\frac{b}{a}\right)^2$, echivalent $b^2\cdot e^{\frac{a}{b}} < a^2\cdot e^{\frac{b}{a}}$.

3. Aflați restul împărțirii polinomului $p=X^{2022}+X^{1882}+X^{140}$ la polinomul $q=X^2+X+1$.

Daniela Iancu și *Ileana Duma*, Craiova

Soluție: (*Prusacov Andrei, Dădulescu Rareș, elevi C.N.„Carol I”, Craiova*)

Fie $\epsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, \epsilon^2+\epsilon+1=0, \epsilon^3=1$. Din teorema împărțirii cu rest pentru polinoame, există $g,r\in\mathbb{R}[X], grad(r)<2$ astfel încât $p=q\cdot g+r$, $r=aX+b, a,b\in\mathbb{R}$. Dând valori ϵ și ϵ^2 obținem relațiile $p(\epsilon)=a\epsilon+b, p(\epsilon^2)=a\epsilon^2+b$. Cum $\epsilon^3=1$, deducem că $p(\epsilon)=1+1+\epsilon^2=2+\epsilon^2=a\epsilon+b$, $p(\epsilon^2)=1+1+\epsilon=2+\epsilon=a\epsilon^2+b$. Scăzând cele două relații obținem $a(\epsilon-\epsilon^2)=-1(\epsilon-\epsilon^2)$, deci $a=-1$. Înlocuind pe a avem $-\epsilon+b=\epsilon^2+2$, de unde $b=1$. Astfel că restul împărțirii polinomului $p=X^{2022}+X^{1882}+X^{140}$ la polinomul $q=X^2+X+1$ este $r=-X+1$.

4. Calculați primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos\left(\frac{2021-x^2}{2021+x^2}\right)$.

***

Soluție: (*Tudosie Răzvan, Stoica Mihai, elevi C.N.„Carol I”, Craiova*)

Funcția dată este continuă, deci admite primitive. În plus, este și derivabilă pe mulțimea $\mathbb{R}^*, f'(x)=\begin{cases}-\frac{2\sqrt{2021}}{2021+x^2}, x<0\\ \frac{2\sqrt{2021}}{2021+x^2}, x>0\end{cases}$, $x=0$ fiind punct unghiular.

Folosind metoda integrării prin părți pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,0)$, respectiv $(0,\infty)$, deducem că primitivele funcției f sunt de forma

$$F(x)=\begin{cases} x\arccos\left(\frac{2021-x^2}{2021+x^2}\right)+\sqrt{2021}\cdot\ln(2021+x^2)+c_1, x<0 \\ x\arccos\left(\frac{2021-x^2}{2021+x^2}\right)-\sqrt{2021}\cdot\ln(2021+x^2)+c_2, x>0 \end{cases}$$. Din condiția ca funcția F să fie continuă în 0 obținem relația $c_2=c_1+2\sqrt{2021}\cdot\ln(2021)$.

Folosind notația $F_0\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$F_0(x)=\begin{cases} xf(x)+\sqrt{2021}\cdot\ln(2021+x^2)\,, x<0 \\ xf(x)-\sqrt{2021}\cdot\ln(2021+x^2)+2\sqrt{2021}\cdot\ln(2021)\,, x\geq 0 \end{cases}$$, rezultă că

$$\int f(x)dx=F_0(x)+\mathcal{C}.$$

5. Fie $(G,*)$ și $(G\,',\circ)$ două grupuri cu 2022, respectiv 2021 elemente . Determinați toate morfismele de grup de la G la G'.

Soluție: *(elevă Oporanu Iulia, C.N.„Carol I”, Craiova)*

Fie $f\colon G\to G'$ morfism de grupuri, iar e și e' elementele neutre ale celor două grupuri, respectiv. Rezultă $f(e)=e'$.

Fie $x\in G$. Cum $ord(G)=2022$, deducem că $x^{2022}=e$. Atunci $f(x)^{2022}=f(x^{2022})=f(e)=e'$ (1). Pe de altă parte, cum $ord(G')=2021$, deducem că $f(x)^{2021}=e'$. Ținând cont de relația (1) rezultă că $f(x)=e'$ pentru orice element $x\in G$.

PROBLEME PROPUSE

Clasa a IV-a

1. Determinați numărul natural, $\overline{abc}$ ştiind că prima cifră valorează cât întreitul celei de-a doua, dar cât jumătatea celei de-a treia cifre.
2. În trei coşuri sunt fructe. Numărul fructelor din primul coş întrece numărul celor din al doilea coş cu un sfert din numărul fructelor din al treilea coş. Dacă aş transfera un fruct din al treilea coş în al doilea, toate coşurile ar avea acelaşi număr de fructe. Câte fructe sunt în fiecare coş?
3. Determinați două numere naturale care să îndeplinească simultan condițiile:
   - primul mărit de 3 ori este cât al doilea micşorat cu 6;
   - jumătate din suma lor este 17.
4. O gospodină a obținut din 40 de litri de lapte 4 kg de smântână, iar din 20 kg de smântână a obținut 6 kg de unt. Câți litri de lapte îi sunt necesari pentru 12 kg de unt?
5. Din suma numerelor cuprinse între 600 şi 650 care sunt egale cu răsturnatele lor scădeți suma numerelor cuprinse între 500 şi 550 cu aceeaşi proprietate.
6. Din ce număr scazi de 8 ori câte 8 pentru a obține un număr mai mare cu de 8 ori câte 8 decât 8 ori câte 8?
7. Dacă adunăm triplul unui număr cu triplul altui număr obținem 165. Aflați numerele, ştiind că triplul diferenței numerelor este 45.
8. Suma a patru numere este 1500. Aflați numerele, ştiind că diferența dintre suma primelor trei numere şi suma ultimelor trei numere este 40, iar primul număr este jumătate din al doilea număr şi o treime din al treilea număr.
9. Se dau trei numere naturale. Dacă împărțim pe primul la al doilea sau pe al doilea la al treilea obținem câtul 2 şi restul 3. Aflați cele trei numere, ştiind că diferența dintre primul şi al treilea este 39.
10. Să se afle două numere naturale, ştiind că primul este de 5 ori mai mic decât al doilea, iar diferența dintre dublul celui de-al doilea şi triplul primului este 210.
11. Pe o farfurie sunt 19 fructe: prune, caise, piersici. Numărul piersicilor este de 9 ori mai mare decât al prunelor. Câte caise sunt?
12. Într-o familie sunt mai mulți copii, printre care Maria şi George. Maria are un număr egal de frați şi surori, iar George are de 2 ori mai multe surori decât frați. Câți copii sunt în familie?
13. Găsiți trei numere naturale consecutive astfel încât primul număr micşorat cu 6 să fie cu 6 mai mare decât jumătatea celui de-al treilea număr.
14. Tata are 38 de ani, iar copiii săi au 12, 9, respectiv 7 ani. După câți ani tata va avea vârsta egală cu suma vârstelor copiilor?
15. Mihai are de 5 ori mai mulți lei decât Radu. Câți lei are fiecare dintre ei, ştiind că, dacă Mihai îi dă lui Radu 1200 de lei, atunci suma acestuia reprezintă o jumătate din suma lui Mihai?
16. În două pachete sunt cărți, în primul de două ori mai multe decât în al doilea. Când din primul pachet

s-au scos 30 de cărți, iar din al doilea 20, în primul au rămas de 3 ori mai multe cărți decât în al doilea. Câte cărți erau inițial în fiecare pachet?

17. În două butoaie sunt 32 de litri de lapte. Dacă s-ar turna din primul în al doilea tot atâția litri de lapte câți conține acesta din urmă, în cele două butoaie ar fi cantități de lapte egale. Câți litri de lapte sunt în primul butoi?
18. Alina, Matei și părinții lor au împreună 92 de ani. Copiii sunt gemeni, iar vârstele părinților sunt reprezentate de numere consecutive impare. Când s-a născut Matei, tatăl, fiind cel mai în vârstă, avea 27 de ani. Câți ani are mama acum?
19. Avem 7 bile de aceeași formă, dintre care una este mai ușoară decât celelalte. Cu ajutorul unei balanțe, folosind cel mult două cântăriri, găsiți bila mai ușoară.
20. Într-o cutie sunt 20 de bile negre, 20 de bile roșii și 20 de bile albe. Care este numărul minim de bile care trebuie scos, fără a privi bilele, pentru a fi siguri că am extras 11 bile de aceeași culoare?
21. Să se afle cât cântărește un pește știind că are coada de 4 kg, capul cântărește cât coada și jumătatea trunchiului, iar trunchiul cât coada și capul împreună.
22. Dacă se așază câte o vrabie pe câte un par, rămâne o vrabie fără par. Dacă se așază câte două vrăbii pe câte un par, rămâne un par fără vrabie. Câte vrăbii și câți pari sunt?
23. 8 muncitori au săpat în 12 zile 336 metri de șanț. Dacă lucrează 10 muncitori timp de 7 zile, ce lungime de șanț vor săpa?
24. Ionuț începe munca pe data de 10. Pentru fiecare zi de muncă, el câștigă 30 de lei, iar duminica nu muncește. Pe data de 26 seara, a aceleiași luni, obosit, își dă demisia. Dacă a câștigat 420 de lei, în ce zi a săptămânii a început munca?
25. Dacă un pahar și o sticlă cântăresc cât o cană, sticla respectivă cântărește cât paharul și o farfurie, iar două căni cântăresc cât 3 farfurii, atunci câte pahare cântăresc cât o sticlă?

Rubrică realizată de prof. Isbiceanu Victoria și prof. Lăzărescu Daniela,

C.N. „Carol I”, Craiova

Clasa a V-a

1. Ana scrie pe tablă numerele

$$1, 9, 11, 17, 18, 26, 28, 34, 35, 43, 45, 51, \dots, 2023.$$

Bogdan șterge din șir toate pătratele perfecte. Câte numere au rămas pe tablă?

Luca Firănescu, elev C.N. „ Carol I” Craiova

2. Arătați că există o infinitate de numere naturale n pentru care $7|18^n + 26^n$.

Erik Preda, elev C.N. „ Carol I” Craiova

3. Arătați că $3^n + n^2 + 2023$ nu este pătrat perfect pentru nicio valoare a numărului natural n.

Radu Grigorie, elev C.N. „ Carol I” Craiova

4. Determinați cel mai mic număr natural n cu un număr impar de cifre care are următoarea proprietate: numărul n și numărul obținut din acesta prin eliminarea cifrei din mijloc sunt divizibile cu 2023.

Prof. Luminița Popescu, Craiova

5. Fie numerele a, b, c, d, e naturale consecutive, în ordine crescătoare și m un număr natural astfel încât:

$$(2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e)(m^2 + 2m + 2) = 1147 .$$

Calculați $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + m^2$.

Prof. Delia Corina Schneider, Craiova

6. Dacă numărul 2^{2023} are *m* cifre, iar numărul 5^{2023} are *n* cifre, determinați $m+n$.

Prof. Nicolaie Tălău, Craiova

7. Să se determine numărul natural *n* astfel încât numărul

$$\frac{1\cdot 2^2+1\cdot 2\cdot 3^2+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4^2+\cdots+1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 2021\cdot 2022^2+2}{3^n}$$

să fie natural și să aibă cea mai mica valoare posibilă.

Prof. Valerica Pometescu, Craiova

8. Se dau numerele $x=7^{2023}+7$ și $y=8^{2023}+8$. Arătați că *x* și *y* au cel puțin trei divizori comuni diferiți de 1.

Prof. Elena Popa, Baia de Fier

9. Se consideră numărul natural *n* care verifică egalitatea

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=2025.$$

Dacă produsul $P=1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)$ se divide cu 3^x, iar suma $S=1+2+3+\cdots+n$ se divide cu 3^y, aflați cea mai mare valoare posibilă a lui $x+y$.

Prof. Monica Stanca, Craiova

10. a) Arătați că există numere naturale a,b,c care au suma 2023 şi $2^a+2^b+2^c$ este pătrat perfect.
b) Stabiliți dacă există numere naturale a,b,c care au suma 2023 şi $3^a+3^b+3^c$ este pătrat perfect.

Sofia Şchioplescu, Sebastian Doran, elevi C.N. „ Carol I” Craiova

Clasa a VI-a

1. Găsiți toate numerele naturale nenule n pentru care $(5^{n-1}+7^{n-1})$ divide pe (5^n+7^n).

Bogdan Bucătaru, elev C.N.„Carol I” Craiova

2. La un concurs de șah, unde nu au loc remize, se întâlnesc băieți cu fete. Un spectator a ghicit câștigătorii la 74% din întâlniri. Știind că în 90% din numărul de partide jucate câștigătorii au fost băieți, iar spectatorul a ghicit 80% din partidele în care câștigători au fost băieţii, cât la sută din partidele în care au fost câștigătoare fetele au fost ghicite?

Ana Grigorie, elev C.N.„Carol I” Craiova

3. Fie triunghiul ABC ascuţitunghic. Prin vârful A al triunghiului se duce o dreaptă $d\perp AB$. Fie $CD\perp d, D\in d$. Dacă M este mijlocul lui $[BC]$, arătaţi că $\sphericalangle MAB\equiv\sphericalangle MDC$.

Prof. Gabriel Tica, Craiova

4. Dacă a și b sunt două numere întregi și numărul a^2+b^2 este divizibil cu 7, arătați că $3a+4b+2023$ este divizibil cu 7.

Andrei Dobre Mic, elev C.N.„Carol I” Craiova

5. Fie $A=\{1,2,3,\ldots,2023\}$.
a) Produsul elementelor mulțimii A este un pătrat perfect?
b) Determinați mulțimea $B\subset A$, cu cel mai mare număr de elemente, astfel încât suma pătratelor oricăror două elemente ale lui B să nu se dividă cu diferența lor.

Ana Maria Dumitru, elev C.N.„Carol I” Craiova

6. Demonstrați că $A=3\cdot 121^{2023}+7^{2026}$ este divizibil cu 37.

Rareș Ciobanu, elev C.N.„Carol I” Craiova

7. În triunghiul ABC, BD este bisectoarea $\sphericalangle ABC$, $D\in AC$, E este mijlocul laturii BC și $AE\cap BD=\{O\}$. Dacă $\sphericalangle AOB=120°$ și $AE\equiv BD$, aflați măsura $\sphericalangle OCE$.

Prof. Aurelia Petrică, Craiova

8. Fie $N=23^{10}+1$. Determinați suma primilor trei divizori primi ai lui N.

Natalia Vlagiu, elev C.N.„Carol I” Craiova

9. Determinați numerele naturale n pentru care suma celor mai mari trei divizori ai lui n este 2023.

Călin Popescu, elev C.N.„Carol I” Craiova

10. În triunghiul isoscel $ABC, AB = AC,\ \widehat{BAC} = 72°$, iar M este mijlocul laturii BC. Pe prelungirea laturii BC construim punctul D astfel încât $\widehat{DAB} = 36°$, iar în semiplanul determinat de dreapta BC care nu conține punctul A considerăm punctul E astfel încât $\widehat{EDB} = 36°$, iar unghiul $\widehat{ECB} = 18°$. Determinați măsura $\widehat{BEC}$.

Prof. Luminița Popescu, Craiova

Clasa a VII-a

1. Fie triunghiul ABC, $m(\angle A) > 90^o$.Pe laturile AB respectiv AC construim triunghiurile isoscele DAB şi EAC astfel încât $BE \cap CD = \{A\}$.Dacă $DB \cap EC = \{F\}$, arătaţi că punctele F, O şi H sunt coliniare, unde O şi H reprezintă centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul triunghiului ABC.

Prof.Gabriel Tica, Craiova

2. Demonstrați că $\sqrt{\frac{a(b+c)}{7}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{7}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{7}} \leq \frac{9}{14}(a+b+c)$, oricare ar fi a, b, c numere reale pozitive.

Prof. Amzoiu Manuel, Craiova

3. Determinați că $\frac{9}{x} + \frac{16}{y} \geq \frac{49}{x+y}$, unde x, y∈(0, +∞).

Amzoiu Maria Izabela, Craiova

4. Să se calculeze suma $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right] + \left[\frac{9+\sqrt{3}}{3}\right] + \left[\frac{20+\sqrt{4}}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n(2n-3)+\sqrt{n}}{n}\right]$.

Prof. Delia Corina-Schneider, Craiova

5. Se dă un triunghi ABC cu $2 \cdot AB = BC$, în care N, M sunt mijloacele laturilor $[AB]$și $[BC]$ și $P \in$ (AC), astfel încât $AC = 3AP$. Folosind o riglă negradată, construiți perpendiculara în M pe NM.

Prof . Gabriel Tica, Craiova

6. Determinați numărul de soluții întregi ale ecuației $2022x^4$ - y^4 =2023.

Prof. Gabriel Tica, Craiova

7. Determinați $a \in \mathbb{N}$ pentru care $\left[\frac{3a-2}{7}\right] = \left[\frac{108}{5a-6}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreaga a numărului x.

Prof. Stancele Mihaela Carmen, Craiova

8. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left|x - \sqrt{ab}\right| + \left|x - \frac{2ab}{a+b}\right| + \left|x - \frac{a+b}{2}\right| = x - \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, unde a, b sunt numere reale strict pozitive, fixate.

Prof. Stancele Mihaela Carmen, Craiova

9. Arătați că:

a) $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \frac{9}{\sqrt{20}} > 2^3$

b) $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} < 2$

Prof. Stancele Mihaela Carmen, Craiova

10. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$ cu $a^2 + b^2 \neq 0$, astfel încât: $\frac{a+bc\sqrt{3}}{b+a\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$.

a) Arătați că: $\sqrt{c} + \sqrt{2a^2 + b^4 + c^2} \in \mathbb{Q}$.

b) Daca $a, b, c \in \mathbb{N}$ atunci: $(b^2 + 2c) \mid (5b^4+12a^2+4c^2)$

Prof.Stancele Mihaela Carmen, Craiova

Clasa a VIII-a

1. Să se demonstreze că $\left\{x \left| x = \frac{b(a+b)}{a^2+b^2}, a > 0, b > 0\right.\right\} = \left(0, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Prof. Neculai Stanciu, Buzău

2. Rezolvaţi ecuaţia $x^6 + 3x^2 = 3x^4 + 28$

Prof. Nicolae Ivăşchescu, Canada

3. Arătaţi că : $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \dots + \frac{1}{2001^2} < \frac{1251}{1001}$.

Prof. Gabriel Tica, Craiova

4. Fie $ABCDEF$ o prismă triunghiulară dreaptă cu baza triunghiul ABC echilateral. Știind că dreptele BD și AF sunt perpendiculare, calculați tangenta unghiului determinat de dreptele AE și CF.

Prof. Lavinia Trincu, Craiova

5. Determinați funcția $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, care verifică simultan condițiile:

(*i*) $f(x) = f(x+1) - 2, \forall x \in \mathbb{N}$;

(*ii*) $f(2023) = 6069$.

Prof. Elena Popa, Baia de Fier

6. Fie mulțimea $A = \{2k + 3p \mid k, p \in \mathbb{Z}\}$. Determinați $\mathbb{Z} \backslash A$.

Prof. Nicolae Tălău, Craiova

7. Arătați că în orice tetraedru are loc relația:

$$d_1h_2h_3h_4 + d_2h_1h_3h_4 + d_3h_1d_2d_4 + d_4h_1h_2d_3 = h_1h_2h_3h_4,$$

unde h_i, cu $i = \overline{1,4}$ și d_j, cu $j = \overline{1,4}$ sunt lungimile înălțimilor tetraedrului, respectiv distanțele de la un punct din interiorul tetraedrului la fețele acestuia.

Prof. Nicolae Tălău, Craiova

8. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 8$, $g(x) = x + 10$.

a) Demonstrați că reprezentările grafice ale funcțiilor *f* și *g* sunt două drepte perpendiculare.

b) Dacă $x \in \left[-4\sqrt{5} - 1;\ 4\sqrt{5} - 1\right]$, demonstrați inegalitatea:

$$(f^2(x) + 1)(g^2(x) + 1) \geq 2(f(x) \cdot g(x) - 1)(f(x) + g(x)).$$

Prof. Valerica Pometescu, Craiova

9. Fie x și y numere reale strict pozitive care verifică relația : $\sqrt{x^4 + 16y^2} + \sqrt{y^4 + 16x^2} = 12$. Demonstrați că $x \cdot y < 2{,}25$.

Prof. Marian Firicel, Craiova

10. Dacă *x* şi *y* sunt numere reale strict pozitive astfel încât $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{5}$, să se demonstreze că $\left|\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right| = 1$.

Prof. Cristina Ungureanu, Craiova

Clasa a IX-a

1. Demonstrați că, dacă $a, b, c > 0$ și $abc = 3$, atunci $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{3abc}{ab+bc+ca}$.

Lorin Dimitrie Ungureanu, elev C.N. „Carol I", Craiova

2. Să se rezolve inecuația $[x]^3 - (x-1) \cdot [x]^2 \leq 4(1 - \{x\})$.

Rebecca Pitru elev C.N. „Carol I", Craiova

3. Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $(tgx_1 + tgx_2 + tgx_3)(ctgx_1 + ctgx_2 + ctgx_3) = 1$. Demonstrați că există $i, j \in \{1, 2, 3\}$ cu $i \neq j$ astfel încât $|cosx_i| = |cosx_j|$.

Prof. Ionuț Ivănescu, Craiova

4. a) Determinaţi numerele m pentru care ecuaţia $x^2 + 2mx + m - 10$ are rădăcini întregi.
   b) Rezolvați $[x]^2 - (m^2 + m)[x] + m^3 = 0$, unde m este un număr întreg fixat.

Prof. Carmen Georgescu, Craiova

5. Considerăm un triunghi ABC și punctele M, G, N în planul triunghiului astfel încât $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}, 3\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} + 4\overrightarrow{CB} = \vec{0}$, iar punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABM.
   a) Demonstrați că punctele N, G, C sunt coliniare.
   b) Dacă P este simetricul punctului A față de N, iar Q este mijlocul segmentului $[AC]$, demonstrați că P aparține dreptei GQ.

Daniel Cristian Ciurcea, Craiova

6. Arătați că oricare ar fi $x, y, z > 0$ are loc inegalitatea:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) + xyz + 15 > 3(xy + yz + zx) + 3(x + y + z).$$

Carina Maria Viespescu, Craiova

7. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + px + q$ cu rădăcinile x_1, x_2 și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 + p_1x + q_1$ cu rădăcinile x_3, x_4 . Arătați că:

$$f(x_3) \cdot f(x_4) = g(x_1) \cdot g(x_2) = (p - p_1)(pq_1 - qp_1) + (q - q_1)^2.$$

Prof. Daniela Mirea, Prof. Daniela Stoian, Craiova

8. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții astfel încât f și $g - f$ sunt monotone de același tip. Demonstrați că dacă $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$, atunci g este injectivă.

Prof. Sorin Pușpană, Craiova

9. Fie un triunghi echilateral ABC și punctul M în planul triunghiului astfel încât

$$\cos \widehat{BMC} \cdot (MA^2 - MB^2 - MC^2) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}.$$

   a) Demonstrați că M este situat în exteriorul triunghiului ABC.
   b) Demonstrați că proiecțiile punctului M pe laturile triunghiului sunt puncte coliniare.

Daniel Cristian Ciurcea, Craiova

10. Fie $a, b > 0$. Aflați cea mai mică valoare a expresiei $E(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$, $x \in (0,1)$.

Prof. Ana Jipescu, Prof. Mihaela Dăianu, Craiova

11. Fie lungimile laturilor BC, CA, AB ale unui triunghi ABC sunt direct proporționale cu numerele 6, 9, 12, punctul M este situat în planul triunghiului astfel încât $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MA}$, iar P este punctul în care bisectoarea unghiului $\widehat{CBA}$ intersectează dreapta CM. Fie numerele reale x, y astfel încât $\overrightarrow{BP} = x \cdot \overrightarrow{BC} + y \cdot \overrightarrow{CA}$. Calculați $\frac{1+x+x^2+\cdots x^{100}}{1+y+y^2+\cdots y^{100}}$.

Raluca Ciurcea, Craiova

Clasa a X-a

1. Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care verifică relația $f \circ f(x) - \frac{1}{6} \cdot x = \frac{5}{6} \cdot f(x)$, pentru orice număr întreg x.

Ștefania Irina Drăgancea, elev C. N. „Carol I”, Craiova

2. Rezolvați ecuația $\log_9(x+5) - \log_{31}(x+9) = \frac{1}{2}$.

Lorin Dimitrie Ungureanu, elev, C. N. „Carol I”, Craiova

3. Considerăm numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3 astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$ și $z_1^3 + z_2^3 + 3z_1z_2z_3 = z_3^3$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ale cărui vârfuri au afixele z_1, z_2, z_3.

Raluca Ciurcea, *Craiova*

4. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, numărul $(2! \cdot 2)! \cdot (3! \cdot 3)! \cdot \ldots \cdot (n! \cdot n)!$ divide numărul $\big((n+1)! - 2\big)!$.

***

5. Rezolvați ecuația $4^x + 2 \cdot 16^{\sqrt{\frac{2}{x}}} = 48$.

Andreea Daiana Tudor, *elev C. N. „Carol I”, Craiova*

6. Rezolvați ecuația $\log_7(13^x - 6) = \log_{13}(7^x + 6)$.

Maria Izabela Amzoiu, elevă, C. N. „Carol I”, Craiova

7. Fie a și b două numere reale mai mari decât 1. Demonstrați inegalitatea:

$$\log_a \frac{a^2 + 4b^2 + 9}{11} + \log_b \frac{b^2 + 4a^2 + 9}{11} \geq \frac{26}{11}.$$

Daniel Cristian Ciurcea, *Craiova*

8. Rezolvați ecuația $3^x + 4^x + 12^x + 2 = 13^x + x$.

Gabriel Leonard Tica, *Craiova*

9. a) Determinați partea fracționară a numărului $A = \left(\sqrt{k^2+1} + k\right)^{2023}$, unde k este un număr natural nenul.

b) Găsiți numere naturale nenule k astfel încât primele 2024 zecimale ale numărului real $B = \left(\sqrt{k^2+1} + k\right)^{2024}$ să fie egale cu 9.

***

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{8^x} + 12 = 13\sqrt[3]{13\sqrt{2^x} - 12}$.

Prof. Cristian Sorin Schneider, *Craiova*

11. Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia $(z + 2022)^{2023} - (z - 2022)^{2023} = 0$.

Prof. Carmen Georgescu, Craiova

Clasa a XI-a

1. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1, x_2 \in (1, \infty)$ și $x_{n+2} = \log_3(2 + x_n \cdot x_{n+1})$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Prof. Cătălin Spiridon, Craiova

2. Fie matricea $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{R})$, astfel încât $\mathrm{A}^3 = 7\mathrm{A}^2 - 17\mathrm{A} + 14\mathrm{I_n}$ unde $\mathrm{n} \geq 3$ este număr natural impar. Să se arate că $\det(\mathrm{A} - 2\mathrm{I_n}) = 0$ și $\det(\mathrm{A} - 3\mathrm{I_n}) = -1$.

Prof. Cristina Spiridon, Craiova

3. Fie matricea $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{R})$, astfel încât $2\mathrm{A}^3 = \mathrm{A} + 2\mathrm{I_n}$ unde $\mathrm{n} \geq 3$. Să se arate că $\det \mathrm{A} > 0$.

Prof. Daniel Alexandru Ion , Craiova

4. Fie $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ și șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0, x_1, \cdots, x_{p-1} \in (1, \infty)$ și $x_{n+p} = \sqrt[p]{2 - \frac{1}{x_n x_{n+1} \cdots x_{n+p-1}}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Prof. Cătălin Spiridon, Craiova

5. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 \in \mathbb{R}$ și $x_{n+1} = \frac{x_n^3}{x_n^4+1}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent și să se afle limita sa.

Elev Costache Mihai, C.N. „Carol I”, Craiova

6. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in (0,1)$ și $x_{n+1} = \frac{\sqrt{1-x_n}+\sqrt{1+x_n}}{2}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}$.
a) Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent și să se afle limita sa.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \cdot x_n$.
c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Eleva Vîrtosu Alexandra, C.N. „Carol I”, Craiova

7. Determinați $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât:

$$x + y + xy = \frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi^2}{25} \text{ și } \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Prof. Gabriel Tica, Craiova

8. Fie $a \in \mathbb{R}$. Se consideră sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} sin^2a \cdot x_1 + sinacosa \cdot x_2 + sinacosa \cdot x_3 + cos^2a \cdot x_4 = 0 \\ cos^2a \cdot x_1 + sin^2a \cdot x_2 + sinacosa \cdot x_3 + sinacosa \cdot x_4 = 0 \\ sinacosa \cdot x_1 + cos^2a \cdot x_2 + sin^2a \cdot x_3 + sinacosa \cdot x_4 = 0 \\ sinacosa \cdot x_1 + sinacosa \cdot x_2 + cos^2a \cdot x_3 + sin^2a \cdot x_4 = 0 \end{cases}$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluții nenule.

Elev Roșca Andrei, C.N. „Carol I”, Craiova

9. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietățile:
a) $f(ax) - f(bx) = x, (\forall) x \in \mathbb{R}$ (unde $a > b > 0$).
b) $f(0) = 0$.

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)^x$.

Elev Tudorache Andrei, C.N. „Carol I”, Craiova

10. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Să se determine termenii generali ai șirurilor $(a_n)_{n\geq 0}$ și $(b_n)_{n\geq 0}$ pentru care $A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_2, n \geq 0$ și apoi să se afle $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \ln \frac{a_n}{b_n}$.

Elev Roșca Andrei, C.N. „Carol I”, Craiova

11. Fie ecuația $\begin{vmatrix} 2 \cdot 4^x & -2 \cdot 4^x & 1 \\ 1 - 8^x & 2^x & -1 \\ -2 \cdot 4^x - a & 2 \cdot 4^x + a & 2^x - 2 \end{vmatrix} = 0$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația are o rădăcină reală dublă.

Elev Tudorache Andrei, C.N. „Carol I”, Craiova

Clasa a XII-a

1. Fie a, b două numere naturale nenule distincte. Demonstrați că polinomul $p = (a-b)(X^a + 2022)(X^b + 2022) - 2023a(X^a + 2022) + 2023b(X^b + 2022)$ este divizibil cu polinomul $q = (X-1)^2$.

Cosmin Gabriel Piran, elev C. N. „Carol I”, Craiova

2. Calculați valoarea integralei $\int_1^3 \frac{1}{x^2-4x+5} \cdot \ln\frac{5+x}{9-x}\, dx$.

***

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea că există $a \in G$ astfel încât $x = ax^3a$ pentru orice $x \in G$. Demonstrați că grupul este abelian.

***

4. Determinați valorile întregi ale lui a pentru care polinomul $f = X^3 - (a^3 - 4)X^2 + (13a + 8)X - 1$ este reductibil peste $\mathbb{Q}$.

Daniel Cristian Ciurcea, Craiova

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1})$. Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} \int_0^x e^t \cdot f(t)dt$.

Matei Tașcău, student, UK

6. Calculați aria subgraficului funcției $f: [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2023^x \cdot x^{2022}}{2023^x + 1}$.

Matei Tașcău, student, UK

7. a) Demonstrați că există o infinitate de numere naturale nenule n astfel încât numărul $5^{n-1} - 3^{n-1}$ să fie divizibil cu n.
   b) Demonstrați că există o infinitate de numere naturale nenule n astfel încât numărul $11^{n-1} + 7^{n-1} - 5^{n-1} - 3^{n-1}$ să fie divizibil cu n.

Ana Dumitru, Craiova

8. Fie $(A, +,\cdot)$ un inel cu proprietatea că $x^2 + y^2 = (x + y)^3$ pentru orice $x, y \in A$. Demonstrați că: a) $x^2 = x$, pentru orice $x \in A$; b) inelul $(A, +,\cdot)$ este comutativ.

Virginia Grigorescu și *Carmen Vlad*, Craiova

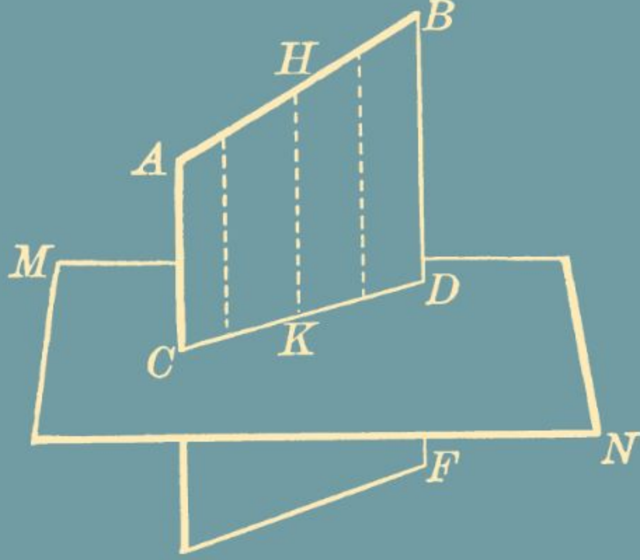
9. Știind că $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcție derivabilă cu derivata continuă astfel încât $f \circ f(x) = x^{2023}$ pentru orice număr real pozitiv x, demonstrați că are loc relația $\int_0^1 (2023 \cdot x^{2022} + 1)f(x)dx = 1$.

Gabriel Leonard Tica, Craiova

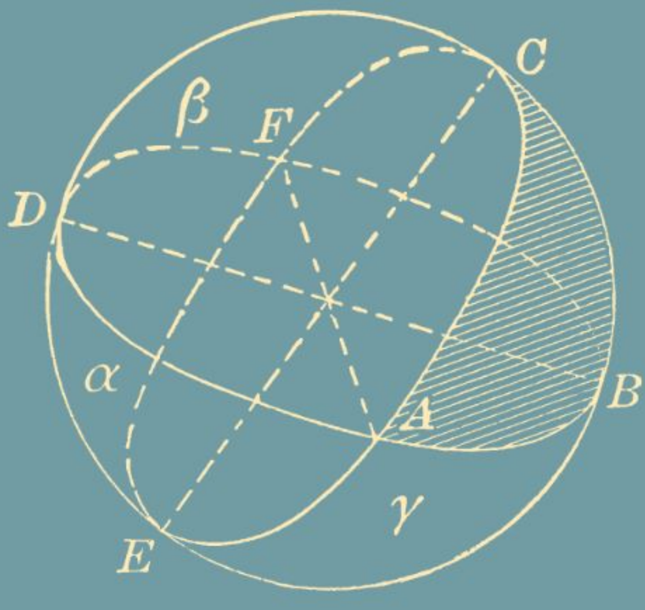
10. Demonstrați că nu există funcții continue $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx \leq 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dx.$$

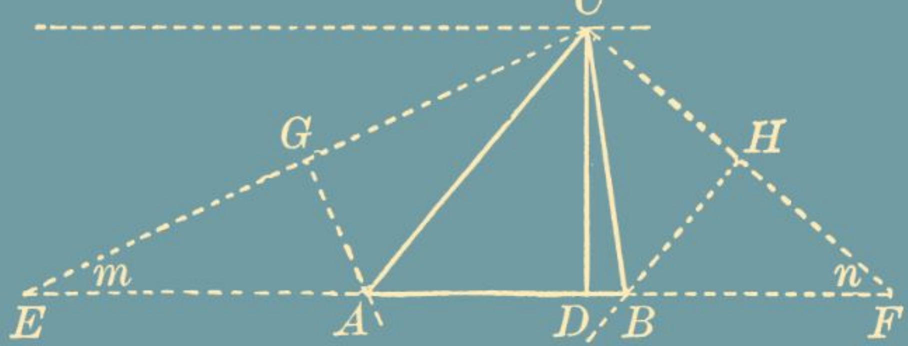
Daniel Alexandru Ion, Craiova



B
H
A
M
D
C
K
N
F



C
β
F
D
α
B
A
γ
E



C
G
H
m
n
E
A
D
B
F