CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A IX-A

Problema 1. Fie $2n+1$ puncte distincte situate pe un cerc. Considerăm toate distanţele dintre oricare două dintre aceste puncte. Care este cardinalitatea minimă pe care o poate avea mulţimea tuturor acestor distanţe?

Problema 2. Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive astfel încât $ab+bc+ca = 4$. Determinaţi valoarea minimă a expresiei:

$$E(a,b,c) = \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{b^2+c^2}{bc} + \frac{c^2+a^2}{ca} - (a-b)^2.$$

Problema 3. Considerăm în plan vectorii nenuli $\overrightarrow{OA_1}, ..., \overrightarrow{OA_n}$, unde $n \geq 3$, astfel încât oricare doi dintre ei sunt necoliniari. Presupunem că inegalitatea

$$|\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_n}| \geq | \pm \overrightarrow{OA_1} \pm ... \pm \overrightarrow{OA_n}|$$

are loc pentru orice alegere a semnelor $\pm$. Arătaţi că există o dreaptă care trece prin O, faţă de care punctele $A_1, ..., A_n$ se află de aceeaşi parte.

Problema 4. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $s(n)$ suma cifrelor lui n. Să se determine numerele naturale $k \geq 2$ pentru care există $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$s(n^3 + an + b) \equiv s(n) \pmod{k},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^\star$.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.