

CLASA A XII-A

Problema 1. Fie G un grup finit și a un element fixat al lui G . Definim mulțimea

$$S_a = \{g \in G \mid ga \neq ag \text{ și } ga^2 = a^2g\}.$$

Să se arate că:

1. Dacă $g \in S_a$, atunci $ag^{-1} \in S_a$.
2. Cardinalul mulțimii S_a este multiplu de 4.

Problema 2. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Demonstrați că:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin(2x)) \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 x) \cos x \, dx.$$

Problema 3. Fie $\mathcal{P}_n$ mulțimea tuturor polinoamelor monice de grad n cu coeficienți reali. Demonstrați că, pentru orice două numere reale $a < b$, avem:

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_n} \int_a^b |P(x)| \, dx > 0.$$

Problema 4. Fie R un inel. Considerăm $x, y \in R$ astfel încât $x^2 = y^2 = 0$. Demonstrați că dacă $x + y - xy$ este nilpotent, atunci și xy este nilpotent.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.