CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A X-A

Problema 1. Determinaţi numerele $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ pentru care
$$|a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a}| = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2.$$

Problema 2. Fie $n \geqslant 2$ şi funcţiile $f, g : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât
$$g(k) = \text{card}\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} | f(i) \leqslant f(k)\},$$
pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Arătaţi că f este bijectivă dacă şi numai dacă g este bijectivă.

b) Dacă g este o funcţie dată, determinaţi, în funcţie de g, numărul de funcţii f care verifică proprietatea dată.

Problema 3. Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie cu proprietatea că
$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y), \text{ pentru orice } x, y > 0.$$

a) Arătaţi că $f(x) > x$, pentru orice $x > 0$.

b) Arătaţi că $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definită prin $g(x) = f(x) - x$, este injectivă.

c) Determinaţi toate funcţiile f cu proprietatea dată.

Problema 4. O cetate aflată în riscul de a fi atacată îşi stabileşte turnuri de apărare, pe care le reprezentăm ca $n \geqslant 3$ puncte în plan, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coliniare. Orice poligon convex având vârfurile printre aceste puncte este numit bază. În fiecare turn de apărare se află câte un soldat. Pentru fiecare bază, statul plateşte câte $k \cdot 2^k$ monede fiecărui soldat aflat în turnurile de pe frontiera bazei, unde k este numărul de soldaţi aflaţi în interiorul (şi nu pe frontierele) bazei. Arătaţi că statul poate plăti soldaţii dintr-un buget de $n(n+1) \cdot 2^{n-3}$ monede, indiferent de localizarea celor n turnuri de apărare.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.