CONCURSUL DE MATEMATICĂ ŢIŢEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A XII-a

Problema 1. Fie G un grup finit şi a un element fixat al lui G. Definim mulţimea

$$S_a = \{g \in G \mid ga \neq ag \text{ şi } ga^2 = a^2 g\}.$$

Să se arate că:

1. Dacă $g \in S_a$, atunci $ag^{-1} \in S_a$.
2. Cardinalul mulţimii S_a este multiplu de 4.

Soluţie. Se arată uşor că dacă $g \in S_a$, atunci $g^{-1} \in S_a$.

1. Fie $g \in S_a$. Atunci $a^2(ag^{-1}) = a(a^2g^{-1}) = a(g^{-1}a^2) = (ag^{-1})a^2$. Pe de altă parte, dacă $(ag^{-1})a = a(ag^{-1})$, atunci $(ag^{-1})a = a^2g^{-1} = g^{-1}a^2$. Prin urmare, deducem că $ag^{-1} = g^{-1}a$, ceea ce contrazice faptul că $g^{-1} \in S_a$.

2. Din punctul 1. rezultă că, dacă $g \in S_a$, atunci $ag^{-1} \in S_a$. Iterând acest argument, obţinem că $a(ag^{-1})^{-1} = aga^{-1} \in S_a$. De asemenea, avem $a(aga^{-1})^{-1} = aag^{-1}a^{-1} = a^2g^{-1}a^{-1} = g^{-1}a^2a^{-1} = g^{-1}a \in S_a$. Observăm că, iterând încă o dată, obţinem că $a(g^{-1}a)^{-1} = aa^{-1}g = g$. Prin urmare, multimea S_a se partiţionează în submulţimi de forma $\{g, ag^{-1}, aga^{-1}, g^{-1}a\}$. Arătăm că orice astfel de submulţime are exact 4 elemente distincte. Este clar că este suficient să arătăm că g este diferit de celelalte trei elemente. Dacă $g = ag^{-1}$, atunci $g = a(ag^{-1})^{-1} = aga^{-1}$, deci $ga = ag$. Analog, dacă $g = g^{-1}a$ atunci $g = (g^{-1}a)^{-1}a = a^{-1}ga$, deci $ag = ga$. În final, dacă $g = aga^{-1}$, atunci obţinem din nou $ag = ga$. În toate cazurile, se obţine că g comută cu a, ceea ce contrazice $g \in S_a$. În concluzie, S_a se scrie ca o reuniune disjunctă de submulţimi cu 4 elemente, deci cardinalul lui S_a este multiplu de 4.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 2. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Demonstraţi că:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin(2x)) \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 x) \cos x \, dx.$$

Soluţie. Facem schimbarea de variabilă $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ în $I = \int_0^{\pi/2} f(\sin(2x)) \sin x \, dx$ şi obţinem $I = \int_0^{\pi/2} f(\sin(2x)) \cos x \, dx$. Prin urmare, avem:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f(\sin(2x))(\sin x + \cos x) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} f\left(\cos\left(2(x - \frac{\pi}{4})\right)\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

Facem schimbarea de variabilă $x \mapsto x + \frac{\pi}{4}$ şi obţinem:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\cos(2x)) \cos(x) dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} f(\cos(2x)) \cos(x) dx,$$

unde pentru ultima egalitate am folosit faptul că integrandul este o funcţie pară. Folosind acum relaţia $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, deducem că:

$$I = \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} f(1 - 2\sin^2 x) \cos x \, dx.$$

Cum $0 \le 2\sin^2(x) \le 1$ pentru $x \in [0, \pi/4]$ putem face schimbarea de variabilă $t = \arcsin\left(\sqrt{2} \sin x\right)$ şi obţinem:

$$I = \int_0^{\pi/2} f(1 - \sin^2 t) \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 t) \cos t \, dt.$$

□

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 3. Fie $\mathcal{P}_n$ multimea tuturor polinoamelor monice de grad n cu coeficienţi reali. Demonstraţi că, pentru orice două numere reale $a < b$, avem:

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_n} \int_a^b |P(x)|dx > 0.$$

Cristi Săvescu

Soluţie. Notăm cu $\varepsilon = \dfrac{b-a}{4n}$ şi considerăm un polinom $P \in \mathcal{P}_n$ cu rădăcinile complexe $z_1, ..., z_n$. Notăm cu $\alpha_1, ..., \alpha_n$ părţile reale ale rădăcinilor şi definim intervalele $I_i = (\alpha_i - \varepsilon, \alpha_i + \varepsilon)$.

Considerăm acum muţimea $S = [a, b] \setminus \cup_{i=1}^{n} I_i$. Deoarece orice reuniune de intervale deschise poate fi exprimată ca o reuniune disjunctă de intervale deschise, rezultă că S se poate scrie ca o reuniune disjunctă de intervale închise (unele dintre acestea putând fi degenerate, adică formate dintr-un singur punct). Măsura muţimii S este egală cu suma lungimilor acestor intervale şi este cel puţin egală cu $b-a-2n\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, unde egalitatea are loc când intervalele I_i sunt incluse in $[a, b]$ şi disjuncte două câte două.

Observăm că pentru orice $x \in S$ şi pentru fiecare $1 \le i \le n$, avem

$$|x - z_i| \ge |x - \alpha_i| \ge \varepsilon.$$

Prin urmare, rezultă că

$$|P(x)| = \prod_{i=1}^{n} |x - z_i| \ge \varepsilon^n, \forall x \in S.$$

Concluzionăm că:

$$\int_a^b |P(x)|dx \ge \int_S |P(x)|dx \ge \int_S \varepsilon^n \ge \frac{b-a}{2}\varepsilon^n = \frac{(b-a)^{n+1}}{n^n 2^{2n+1}}.$$

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 4. Fie R un inel. Considerăm $x, y \in R$ astfel încât $x^2 = y^2 = 0$. Demonstraţi că dacă $x + y - xy$ este nilpotent, atunci şi xy este nilpotent.

Janez Šter

Soluţie. Deoarece $(x + y)^m$ este suma cuvintelor în x şi y de lungime m, se deduce imediat că

$$(x + y)^{2n} = (xy)^n + (yx)^n, \forall n \geq 1.$$

Fie $a = x + y - xy$ şi $b = x + y + yx$, atunci $ab = ba = xy + yx$. Avem că

$$(ab)^n = (xy + yx)^n = \left((x + y)^2\right)^n = (x + y)^{2n} = (xy)^n + (yx)^n.$$

Deoarece a este nilpotent, rezultă că există un $k \geq 1$ astfel încât $a^k = 0$, deci $(ab)^k = a^k b^k = 0$. Prin urmare, avem $(xy)^k = -(yx)^k$. Demonstraţia se încheie observând că

$$(xy)^{k+1} = x(yx)^k y = -x(xy)^k y = 0.$$

$\square$