CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A IX-a

Problema 1. Fie $2n+1$ puncte distincte situate pe un cerc. Considerăm toate distanţele dintre oricare două dintre aceste puncte. Care este cardinalitatea minimă pe care o poate avea mulţimea tuturor acestor distanţe?

Radu Bumbăcea

Soluţie. Notăm cu P_1 un punct oarecare de pe cerc, iar apoi numerotăm consecutiv celelalte puncte ca $P_2, P_3, \ldots, P_{2n+1}$, în sensul acelor de ceasornic. Există $2n$ segmente având un capăt în P_1 şi celălalt în unul dintre celelalte puncte.

Dacă dintre aceste $2n$ segmente cel mult $n-1$ au lungimi distincte, atunci, aplicând Principiul Cutiei, rezultă că există trei indici $i, j, k \in \{2, 3, \ldots, 2n+1\}$ astfel încât:

$$P_1P_i = P_1P_j = P_1P_k.$$

Aceasta ar implica faptul că cercul pe care se află cele $2n+1$ de puncte şi cercul de centru P_1 cu raza P_1P_i se intersectează în trei puncte distincte, ceea ce este imposibil. Aşadar, dintre aceste $2n$ segmente, cel puţin n au lungimi distincte. Prin urmare, cardinalitatea minimă a mulţimii distanţelor este cel puţin n.

Pentru a arăta că această margine inferioară poate fi atinsă, considerăm punctele $P_1, P_2, \ldots, P_{2n+1}$ ca fiind vârfurile unui poligon regulat cu $2n+1$ laturi. Observăm că distanţa dintre două puncte P_i și P_j depinde, datorită simetriei, doar de restul împărţirii numărului $j-i$ la n. Cele n distanţe distincte sunt:

$$P_1P_2, P_1P_3, \ldots, P_1P_{n+1}.$$

Aşadar, cardinalitatea minimă a mulţimii tuturor distanţelor este n.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 2. Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive astfel încât $ab+bc+ca = 4$. Determinaţi valoarea minimă a expresiei:

$$E(a,b,c) = \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{b^2+c^2}{bc} + \frac{c^2+a^2}{ca} - (a-b)^2.$$

Soluţie. Avem că

$$\begin{aligned} E(a,b,c) &= 6 + \frac{a^2+b^2}{ab} - 2 + \frac{b^2+c^2}{bc} - 2 + \frac{c^2+a^2}{ca} - 2 - (a-b)^2 \\ &= 6 + \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} - (a-b)^2. \end{aligned}$$

Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz, obţinem

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca}\right) \geq (|a-b|+|b-c|+|c-a|)^2,$$

astfel încât

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} \geq \frac{1}{4}(|a-b|+|b-c|+|c-a|)^2. \tag{1}$$

Inegalitatea triunghiului ne dă:

$$|a-b|+|b-c|+|c-a| \geq |a-b|+|b-c+c-a| = 2|a-b|. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) se obţine:

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} \geq (a-b)^2.$$

Prin urmare, avem

$$E(a,b,c) \geq 6,$$

cu egalitate pentru $a = b = c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 3. Considerăm în plan vectorii nenuli $\overrightarrow{OA_1}, ..., \overrightarrow{OA_n}$, unde $n \geq 3$, astfel încât oricare doi dintre ei sunt necoliniari. Presupunem că inegalitatea

$$|\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_n}| \geq | \pm \overrightarrow{OA_1} \pm ... \pm \overrightarrow{OA_n}|$$

are loc pentru orice alegere a semnelor $\pm$. Arătaţi că există o dreaptă care trece prin O, faţă de care punctele $A_1, ..., A_n$ se află de aceeaşi parte.

Cristi Săvescu

Soluţie. Fie $\vec{v} := \overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_n}$. Dacă $\vec{v} = \vec{0}$, atunci $\pm\overrightarrow{OA_1} \pm ... \pm \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ pentru orice alegere a semnelor $\pm$. De aici se deduce imediat că $\overrightarrow{OA_1} = ... = \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$, ceea ce nu este posibil.

Fie acum d dreapta care trece prin O şi este perpendiculară pe vectorul $\vec{v}$. Arătăm că toţi vectorii $\overrightarrow{OA_1}, ..., \overrightarrow{OA_n}$ se află de aceeaşi parte a dreptei d ca şi $\vec{v}$.

Presupunem, prin reducere la absurd, că există un vector $\overrightarrow{OA_i}$ care se află de cealaltă parte a dreptei d. Fără a restrânge generalitatea, fie acest vector $\overrightarrow{OA_n}$. Avem că $-\overrightarrow{OA_n}$ se află de aceeaşi parte a dreptei d ca şi $\vec{v}$, astfel că unghiul dintre aceşti doi vectori are măsură strict mai mică decât $90°$. Aplicând faptul că, într-un triunghi, latura opusă unui unghi obtuz este mai mare decât oricare dintre celelalte laturi, deducem că

$$|\vec{v} - \overrightarrow{OA_n}| > |\vec{v}|. \tag{3}$$

Pe de altă parte,

$$|\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_{n-1}} + \overrightarrow{OA_n}| \geq |\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_{n-1}} - \overrightarrow{OA_n}|. \tag{4}$$

Adunând $|\vec{v}|$ în ambele părţi ale inegalităţii (4) şi aplicând inegalitatea triunghiului, obţinem:

$$\begin{aligned} 2|\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_n}| &\geq |\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_n}| + |\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_{n-1}} - \overrightarrow{OA_n}| \\ &\geq 2|\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_{n-1}}|. \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, $|\vec{v}| \geq |\vec{v} - \overrightarrow{OA_n}|$, ceea ce contrazice (3). Prin urmare, presupunerea de mai sus este falsă, ceea ce înseamnă că toţi vectorii $\overrightarrow{OA_1}, ..., \overrightarrow{OA_n}$ se află de acceaşi parte a dreptei d ca şi $\vec{v}$. $\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 4. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $s(n)$ suma cifrelor lui n. Să se determine numerele naturale $k \geq 2$ pentru care există $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$s(n^3 + an + b) \equiv s(n) \pmod{k},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soluţie. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există un număr natural ℓ (care depinde de n) astfel încât $10^{2\ell} > an$ şi $10^\ell > b$. Pentru un astfel de număr ℓ avem că:

$$s(n^3 + an + b) \equiv s(n) = s(10^\ell n) \equiv s(10^{3\ell} n^3 + 10^\ell an + b) \pmod{k}. \tag{5}$$

Datorită faptului că ℓ satisface inegalităţile de mai sus, rezultă că

$$s(10^{3\ell} n^3 + 10^\ell an + b) = s(10^{3\ell} n^3) + s(10^\ell an) + s(b) = s(n^3) + s(an) + s(b). \tag{6}$$

Din (5) şi (6) deducem că

$$s(n^3 + an + b) \equiv s(n^3) + s(an) + s(b) \pmod{k},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Căutăm un număr $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = 10^r \cdot m$ cu $m \equiv 1 \pmod{100}$. În plus, vrem ca $b < 10^r$ şi $9 \cdot 10^{3r} < an < 10^{3r+1}$. Ultimul şir de inegalităţi este echivalent cu $\dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a} < m < \dfrac{10^{2r+1}}{a}$. Pentru a garanta existenţa unui $m \equiv 1 \pmod{100}$ între $\dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a}$ şi $\dfrac{10^{2r+1}}{a}$, trebuie ca $\dfrac{10^{2r+1}}{a} - \dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a} > 100 \Longleftrightarrow 10^r > 10\sqrt{a}$.

Într-adevăr, dacă $\dfrac{10^{2r+1}}{a} - \dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a} > 100$, atunci $\dfrac{10^{2r+1}}{a} > \dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a} + 100$, deci $\left[\dfrac{10^{2r+1}}{a}\right] \geq \left[\dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a} + 100\right] = \left[\dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a}\right] + 100$. Printre numerele consecutive

$$\left[\frac{9 \cdot 10^{2r}}{a}\right] + 1, \ldots, \left[\frac{9 \cdot 10^{2r}}{a}\right] + 100$$

există un număr congruent cu 1 modulo 100, şi acesta este numărul m căutat.

În concluzie, există n cu proprietăţile de mai sus dacă alegem r astfel încât $10^r > \max\{10\sqrt{a}, b\}$.

Avem că $n^3 = 10^{3r} m^3$, unde $m^3 \equiv 1 \pmod{100}$, deci n^3 are forma

$$\star \ldots \star\, 01 \underbrace{00 \ldots 0}_{3r \text{ zerouri}}.$$

Apoi, an este de forma:

$$9\underbrace{\star\star\ldots\star}_{3r\text{cifre}},$$

unde ultimele q cifre sunt egale cu 0 (q este numărul cifrelor lui b). Avem astfel că:

$$s(n^3+an+b)=s(n^3)+s(an)+s(b)-9 \tag{7}$$

$\square$

Din (6) şi (7) deducem că $9\equiv 0 \pmod k$, adică k este fie 3, fie 9.

Folosind acum faptul că $s(n)\equiv n \pmod 9$, $\forall n\in\mathbb{N}$, avem că dacă $k|9$ atunci

$$s(n^3+an+b)\equiv s(n) \pmod k, \forall n\in\mathbb{N} \iff n^3+an+b\equiv n \pmod k, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Dând lui n valorile 0 şi 1 obţinem că $a\equiv b\equiv 0 \pmod k$, deci

$$s(n^3+an+b)\equiv s(n) \pmod k, \forall n\in\mathbb{N} \iff n^3\equiv n \pmod k, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Acest lucru se întâmplă dacă şi numai dacă $k=3$.