CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A XI-a

Problema 1. Să se determine toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisfac egalitatea

$$f(x+y) = f(x+f(y)),$$

pentru toţi $x, y \in \mathbb{R}$.

Gheorghe Răuţu

Soluţie. _Varianta 1_ Dacă f este injectivă atunci se deduce imediat din egalitatea din enunţ că $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Altfel, există $y_1 < y_2$ cu $f(y_1) = f(y_2)$. Avem că

$$f(x+y_1) = f(x+f(y_1)) = f(x+f(y_2)) = f(x+y_2), \forall x \in \mathbb{R},$$

de unde se obţine că f este periodică de perioadă $y_2 - y_1$. Fie mulţimea perioadelor funcţiei f:

$$\mathcal{F} = \{t > 0 | f(x+t) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Dacă 0 este punct de acumulare al lui $\mathcal{F}$ atunci există în $\mathcal{F}$ un şir $t_n \to 0$. Avem că

$$f(x) = f\left(x - \left[\frac{x}{t_n}\right] t_n\right) = f\left(\lim_{n\to\infty}\left(x - \left[\frac{x}{t_n}\right] t_n\right)\right) = f(0),$$

unde ultima egalitate se obţine astfel: $\left[\frac{x}{t_n}\right] \leq \frac{x}{t_n} < \left[\frac{x}{t_n}\right] + 1 \Longrightarrow 0 \leq x - \left[\frac{x}{t_n}\right] t_n < t_n$, deci $\lim_{n\to\infty}\left(x - \left[\frac{x}{t_n}\right] t_n\right) = 0$. Am obţinut în acest caz că f este funcţia constantă.

Dacă 0 nu este punct de acumulare al lui $\mathcal{F}$ atunci această mulţime are un infimum $t > 0$ şi cum f este o funcţie continuă se obţine imediat că $t \in \mathcal{F}$. Este clar că f este injectivă pe intervalul $(0, t)$, altfel există $0 < y_1 < y_2 < t$ astfel încât $f(y_1) = f(y_2)$ şi cu argumentul de mai sus se obţine că $y_2 - y_1 \in \mathcal{F}$. Inegalitatea $0 < y_2 - y_2 < t$ contrazice minimalitatea lui t, ceea ce reprezintă o contradicţie. Deci, f este injectivă pe intervalul $(0, t)$ şi cum este şi continuă, înseamnă că este strict monotonă pe acest interval. Atunci, pentru orice $a \in (0, t)$ avem

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) < f(a) < \lim_{x\to t} f(x) = f(t),$$

ceea ce contrazice egalitatea $f(0) = f(t)$. Am obţinut o contradicţie, deci singurele funcţii care verfică condiţiile din enunţ sunt funcţiile constante şi funcţia identitate.

Varianta 2 Înlocuind pe x cu $x-y$ în relaţia din enunţ obţinem

$$f(x) = f(x + f(y) - y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Deducem că $f(y) - y \in \mathcal{F}$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Dacă $f(y) = y$, $\forall y \in \mathbb{R}$, atunci f este funcţia identitate, care verifică cerinţele problemei. Altfel, există un $y_0 \in \mathbb{R}$ pentru care $f(y_0) \neq y_0$, cu alte cuvinte, mulţimea de perioade $\mathcal{F}$ este nevidă. Dacă există un $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{f(y)-y}{f(y_0)-y_0} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ atunci, conform criteriului de densitate al lui Kronecker, mulţimea

$$\{m(f(y) - y) + n(f(y_0) - y_0) | m, n \in \mathbb{Z}\}$$

este densă în $\mathbb{R}$. Deoarece f este constantă egală cu $f(0)$ pe această mulţime, rezultă că f este constantă.

Investigăm acum cazul în care $\dfrac{f(y)-y}{f(y_0)-y_0} \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Deoarece f este continuă şi funcţia $\dfrac{f(y)-y}{f(y_0)-y_0}$ este de asemenea continuă, ceea ce împreună cu $\dfrac{f(y)-y}{f(y_0)-y_0} \in \mathbb{Q}$ ne dă că $\dfrac{f(y)-y}{f(y_0)-y_0}$ este funcţia constantă. Se obţine că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(y) = y + a$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Substituind această expresie în relaţia din enunţ găsim că $a = 0$, deci f este funcţia identitate.

Varianta 3 Arătăm că f este fie funcţia constantă, fie funcţia identitate. Notăm cu $\mathrm{Im} f = \{f(x) | x \in \mathbb{R}\}$ imaginea funcţiei f. Substituind $x = 0$ în relaţia din enunţ găsim că $f(y) = f(f(y))$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, $f(x) = x$, $\forall x \in (a, b)$, unde a şi b sunt infimul şi supremul mulţimii $\mathrm{Im} f$, care este un interval pentru că f este continuă.

Să presupunem că f nu este constantă şi a este finit. Din continuitate se obţine că $f(a) = a$ şi $f(x) = x$, $\forall x \in [a, a + 2d]$ pentru un $d > 0$. În acest caz, pentru orice $0 < t < d$ avem că $f(a - t) = a + s$ pentru un $s > d$. Într-adevăr, dacă $s \leq d$ atunci

$$a = f(t + a - t) = f(t + f(a - t)) = f(a + t + s) = a + t + s,$$

ceea ce este imposibil. Am obţinut că $f(x) > a + d$, $\forall x \in (a - d, a)$ şi $f(a) = a$, ceea ce contrazice faptul că f are proprietatea lui Darboux. Am arătat că dacă f nu este constantă atunci $a = -\infty$. Analog se arată că $b = \infty$, cu alte cuvinte f este funcţia identitate. $\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 2. Fie $n \geq 2$ și fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$$\{\text{rang}(A^k) \mid k \geq 1\} = \{\text{rang}(B^k) \mid k \geq 1\}.$$

Arătaţi că $\text{rang}(A^k) = \text{rang}(B^k)$, pentru orice $k \geq 1$.

Cristi Săvescu

Soluţie. <u>*Varianta 1*</u>

Arătăm prin inducţie că, dacă $r = \text{rang}(A^k) = \text{rang}(A^{k+1})$ pentru un $k \geq 1$, atunci $\text{rang}(A^m) = r$ pentru orice $m \geq k$. Cazurile $m = k$ şi $m = k+1$ sunt date în ipoteză. Fie acum $r = \text{rang}(A^{m-1}) = \text{rang}(A^m)$ pentru un $m \geq k+1$, atunci

$$\text{rang}(A^{m+1}) = \text{rang}(A^m A) \leq \text{rang}(A^m) = r.$$

Pe de altă parte, dacă aplicăm inegalitatea lui Frobenius pentru matricele A, A^{m-1}, A atunci

$$\text{rang}(A^m) + \text{rang}(A^m) \leq \text{rang}(A^{m+1}) + \text{rang}(A^{m-1}).$$

Rezultă că $r \leq \text{rang}(A^{m+1})$, deci $\text{rang}(A^{m+1}) = r$.

Acest fapt arătă că şirul $(\text{rang}(A^k))_{k\geq 1}$ este constant de la un anumit rang încolo, iar până la acel rang este un şir strict descrescător.

Avem următoarea lemă:

Lemă. Fie $(r_n)_{n\geq 1}$ şi $(s_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale care sunt constante de la un anumit rang încolo şi sunt strict descrescătore până la acel rang. Dacă

$$\{r_n | n \geq 1\} = \{s_n | n \geq 1\},$$

atunci cele două şiruri sunt egale.

Demonstrăm prin inducţie după $n \geq 1$ că $r_n = s_n$ pentru orice n. Pentru $n = 1$, avem $r_1 = s_1$, deoarece r_1 şi s_1 sunt cele mai mari elemente din mulţimile de valori ale celor două şiruri.

Presupunem acum că $r_i = s_i$ pentru orice $1 \leq i \leq n$ şi arătăm că $r_{n+1} = s_{n+1}$. Procedăm prin reducere la absurd şi presupunem, fără a pierde din generalitate, că $r_{n+1} > s_{n+1}$. Distingem două cazuri:

- Dacă $r_n = r_{n+1}$, atunci şirul $(r_n)_{n\geq 1}$ devine constant de la n încolo, deci r_{n+1} este cel mai mic element al mulţimii valorilor acestuia. Pe de altă parte, muţimea valorilor şirului $(s_n)_{n\geq 1}$ conţine un element s_{n+1} care este strict mai mic decât r_{n+1}, ceea ce contrazice ipoteza.

- Dacă $r_n > r_{n+1}$, atunci

$$r_n = s_n > r_{n+1} > s_{n+1}.$$

prin urmare, r_{n+1} aparţine muţimii valorilor primului şir, dar nu şi muţimii valorilor celui de-al doilea şir, ceea ce contrazice din nou ipoteza.

Astfel, în ambele cazuri obţinem o contradicţie, deci $r_{n+1} = s_{n+1}$.

Aplicând acum lema în cazul celor două şiruri $(\text{rang}(A^k))_{k\geq 1}$ şi $(\text{rang}(B^k))_{k\geq 1}$, concluzionăm că $\text{rang}(A^k) = \text{rang}(B^k)$, pentru orice $k \geq 1$.

Varianta 2

Este clar că avem egalitatea

$$\text{rang}(A^k) = \text{rang}(J^k), \forall k \geq 1,$$

unde J este formă canonică Jordan asociată matricei A. Astfel, demonstraţia problemei se reduce la cazul în care A şi B sunt în forma canonică Jordan.

Dacă un bloc Jordan are un număr nenul pe diagonala principală, atunci orice putere a sa are rang constant, egal cu dimensiunea blocului. Dacă un bloc Jordan $\mathcal{J}$ de dimensiune m are 0 pe diagonala principală atunci $\text{rang}(\mathcal{J}^k) = m - k$, $\forall\ 0 \leq k \leq m$ şi $\text{rang}(\mathcal{J}^k) = 0$, $\forall\ k > m$. În plus, este uşor de arătat că o matrice J în forma canonică Jordan având blocurile Jordan $\mathcal{J}_1, ..., \mathcal{J}_s$, satisface relaţia:

$$\text{rang}(J^k) = \text{rang}(\mathcal{J}_1^k) + ... + \text{rang}(\mathcal{J}_s^k), \forall k \geq 1.$$

Pentru un bloc Jordan J_i care are un element nenul pe diagonala principala, avem ca $\text{rang}(J_i^k) = \text{rang}(J_i)$ pentru orice $k \geq 1$. Pe de alta parte, daca blocul Jordan J_i este nilpotent (are numai elementul 0 pe diagonala principala), atunci $\text{rang}(J_i^k) = \text{rang}(J_i^{k-1}) - 1$ daca $2 \leq k \leq \dim(J_i)$ si $\text{rang}(J_i^k) = 0$ daca $k \geq \dim(J_i)$.

Deducem că şirul $(\text{rang}(A^k))_{k\geq 1}$ este constant de la un anumit rang încolo (mai precis de la dimensiunea maxima a unui subbloc Jordan nilpotent), iar până la acel rang este un şir strict descrescător. Apoi se finalizează ca în prima variantă folosind Lema de mai sus.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ŢIŢEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ șirul de numere reale definit prin $a_0 \geq 0$ și

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n+1},$$

pentru orice $n \geq 0$. Demonstrați că există un număr real $a > 0$ astfel încât:

- Pentru orice $a_0 \geq a$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$;
- Pentru orice $0 \leq a_0 < a$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Soluţie. *<u>Varianta 1</u>*

Vom arăta că $a = 2$.
Mai întâi observăm că $a_{n+1} \geq -\frac{1}{n+1} \geq -1$, $\forall n \geq 0$.

- Dacă $0 \leq a_0 \leq 1$, atunci se arată uşor prin inducţie că $-1 \leq a_n \leq 0$, pentru orice $n \geq 1$. Deci $-\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq 0$, astfel că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- Dacă $a_0 \geq 2$, atunci se arată uşor prin inducţie că $a_n \geq n+2$ pentru orice $n \geq 0$, astfel că $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

- Fie acum $1 < a_0 < 2$. Arătăm mai întâi că există măcar un termen al şirului mai mic sau egal cu 1. Presupunem prin reducere la absurd că $1 < a_n$, $\forall n \geq 0$. În acest caz, ţinând cont că $a_0 < 2$, se arată imediat prin inducţie că $a_n < n+2$, $\forall n \geq 0$. Avem că

$$\frac{a_{n+1}}{n+3} = \frac{a_n^2 - 1}{(n+1)(n+3)} = \frac{a_n^2 - 1}{(n+2)^2 - 1} < \left(\frac{a_n}{n+2}\right)^2,$$

pentru orice $n \geq 0$. Iterând inegalitatea de mai sus obţinem

$$\frac{a_n}{n+2} < \left(\frac{a_0}{2}\right)^{2^n} \Longrightarrow 1 < a_n < (n+2)\left(\frac{a_0}{2}\right)^{2^n},$$

pentru orice $n \geq 0$. Am obţinut o contradicţie pentru că $\lim_{n\to\infty}(n+2)\left(\frac{a_0}{2}\right)^{2^n} = 0$. Cu alte cuvinte, există măcar un termen al şirului mai mic sau egal cu 1.

Fie acum $m \geq 1$ astfel încât $a_m \leq 1$. Ca mai sus, se arată uşor prin inducţie că $-\frac{1}{n} \leq a_n \leq 0$, pentru orice $n \geq m+1$. Astfel, se obţine că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Varianta 2</u>

Definim şirul

$$x_n = \sqrt{1 + 1\cdot\sqrt{1 + 2\cdot\sqrt{1 + \ldots + (n-1)\cdot\sqrt{1+n}}}}, \quad \forall n \geq 0.$$

Să notăm că $x_0 = 1$, $x_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+2}} = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ etc. Vom demonstra că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Mai întâi arătăm că şirul este crescător. Pentru orice $n \geq 1$, avem că $\sqrt{1+n} > 1$, deci

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{1+1\cdot\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+...+(n-1)\cdot\sqrt{1+n}}}} > \\ &\sqrt{1+1\cdot\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+...+(n-2)\cdot\sqrt{1+n-1}}}} = x_{n-1}. \end{aligned}$$

Acum demonstrăm că $x_n < 2$, $\forall n \geq 0$. Pentru $n = 0$, avem $x_0 = 1 < 2$. Fixăm $n \geq 1$ şi definim şirul finit auxiliar:

$$y_1 = \sqrt{1+n}, \quad y_i = \sqrt{1+(n-i+1)y_{i-1}}, \quad \forall 2 \leq i \leq n.$$

Este clar că $y_n = x_n$. Vom arăta prin inducţie că $y_i < n-i+2$ pentru orice $1 \leq i \leq n$.

- Pentru $i = 1$, avem $y_1 = \sqrt{1+n} < n+1$, ceea ce este adevărat pentru $n \geq 1$.
- Presupunem că $y_i < n-i+2$ pentru un $i < n$. Atunci,

$$y_{i+1} = \sqrt{1+(n-i)y_i} < \sqrt{1+(n-i)(n-i+2)} = \sqrt{(n-i+1)^2} = n-i+1.$$

Prin urmare, pentru $i = n$, obţinem $y_n < 2$, iar cum $x_n = y_n$, rezultă $x_n < 2$. Astfel, am demonstrat că $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător și mărginit, deci convergent, conform criteriului lui Weierstrass. Notăm limita sa cu a, astfel încât $1 < a \leq 2$.

Arătăm acum că acest număr satisface cerinţa problemei. Avem:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n+1} \geq -\frac{1}{n+1} \geq -1, \quad \forall n \geq 0.$$

Dacă există un s astfel încât $-1 \leq a_s \leq 1$, atunci prin inducţie se poate arăta că $a_n \leq 0$, $\forall n > s$, ceea ce duce la

$$-\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq 0, \quad \forall n > s,$$

şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

• Cazul 1: $0 \leq a_0 < a$. Deoarece x_n creşte spre a, există un $t \geq 1$ astfel încât $a_0 < x_t < a$. Fixăm un astfel de t.

Dacă există un s cu $1 \leq s \leq t$ astfel încât $-1 \leq a_s \leq 1$, atunci $a_n \to 0$ şi am terminat.

Presupunem deci că $a_s > 1$ pentru $1 \leq s \leq t$. Definim şirul finit $(y_n)_{1\leq n\leq t}$ ca mai sus şi arătăm prin inducţie după i cu $0 \leq i \leq t-1$, că $a_i < y_{t-i}$. Pentru $i = 0$, $a_0 < x_t = y_t$. Fie acum $a_i < y_{t-i}$ şi cum $a_i > 1$ obţinem prin ridicare la pătrat că

$$a_i^2 < y_{t-i}^2 \Longrightarrow a_{i+1} = \frac{a_i^2 - 1}{i+1} < \frac{y_{t-i}^2 - 1}{i+1} = y_{t-i-1},$$

ceea ce încheie inducţia.

Punând $i = t - 1$, rezultă că $a_{t-1} < y_1 = \sqrt{1+t}$, iar de aici $a_t < 1$. Aplicând argumentul anterior, deducem că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

• Cazul 2: $a_0 \geq a$. Atunci $a_0 \geq x_t = y_t$, pentru orice $t \geq 1$. La fel ca în cazul anterior, se arată prin inducţie după $0 \leq i \leq t-1$ că $a_i \geq y_{t-i}$. Punând $i = t-1$, obținem $a_{t-1} \geq y_1 = \sqrt{t+1}$, $\forall t \geq 1$, deci $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Observaţie: Dacă cele două demonstraţii sunt corecte atunci limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ din *Varianta 2* trebuie să fie 2. O discuţie legată de acest subiect se găseşte la https://math.stackexchange.com/questions/7204/evaluating-the-nested-radical-sqrt1-2-sqrt1-3-sqrt1-cdots. □

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ
ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 4. Fie $\mathcal{M}$ o submulţime a mulţimii S_n a permutărilor mulţimii $\{1, 2, ...$ $.., n\}$, cu $n \geq 2$, care conţine cel puţin două elemente, astfel încât pentru orice $\sigma, \tau \in \mathcal{M}$ avem că $\sigma\tau \in \mathcal{M}$. Se consideră o funcţie $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisface inegalitatea:

$$|f(\sigma\tau) - f(\sigma) - f(\tau)| \leq 1, \forall \sigma, \tau \in \mathcal{M}.$$

Să se demonstreze că:

$$\max_{\sigma,\tau\in\mathcal{M}} |f(\sigma) - f(\tau)| \leq 2 - \frac{2}{|\mathcal{M}|},$$

unde $|\mathcal{M}|$ denotă cardinalul mulţimii $\mathcal{M}$.

Soluţie. În primul rând, să observăm că pentru orice $\sigma \in \mathcal{M}$, funcţia

$$g_\sigma : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, g_\sigma(\tau) = \sigma\tau, \forall \tau \in \mathcal{M}$$

este bijectivă. Deoarece mulţimea $\mathcal{M}$ este finită, este suficient să arătăm că g_σ este injectivă. Într-adevăr, dacă $g_\sigma(\tau_1) = g_\sigma(\tau_2)$, atunci $\sigma\tau_1 = \sigma\tau_2 \Longrightarrow \tau_1 = \tau_2$.

Fie acum $a, b \in \mathcal{M}$ astfel încât

$$d = \max_{\sigma,\tau\in\mathcal{M}} |f(\sigma) - f(\tau)| = f(b) - f(a).$$

Folosind observaţia de mai sus pentru a, b, deducem că

$$\sum_{\tau\in\mathcal{M}} f(b\tau) = \sum_{\tau\in\mathcal{M}} f(a\tau) \Longrightarrow \sum_{\tau\in\mathcal{M}} (f(b\tau) - f(a\tau)) = 0.$$

Pe de altă parte, avem

$$\begin{aligned} f(b\tau) - f(a\tau) &= (f(b\tau) - f(\tau) - f(b)) - (f(a\tau) - f(\tau) - f(a)) + f(b) - f(a) \\ &\geq d - 2. \end{aligned}$$

Notăm că permutarea identică e aparţine lui $\mathcal{M}$. Pentru orice $\sigma \in \mathcal{M}$, avem că $\sigma^m \in \mathcal{M}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$. Alegând m egal cu ordinul lui σ, obţinem că $e \in \mathcal{M}$. Colectând, avem că

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\tau\in\mathcal{M}} (f(b\tau) - f(a\tau)) = f(b) - f(a) + \sum_{\tau\in\mathcal{M}\setminus\{e\}} (f(b\tau) - f(a\tau)) \\ &\geq d + (d-2)(|\mathcal{M}| - 1). \end{aligned}$$

Rezultă imediat că

$$d \leq 2 - \frac{2}{|\mathcal{M}|}.$$

Observaţie: Inegalitatea obţinută este optimă, întrucât există exemple în care devine egalitate. Un astfel de exemplu este dat de mulţimea $\mathcal{M} = \{e, \sigma, ..., \sigma^{\ell-1}\}$, unde σ este un ciclu de lungime ℓ şi funcţia $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(\sigma^k) = \frac{2k-\ell}{\ell}$, $\forall k \in \{0, 1, , , , \ell-1\}$. Se verifică uşor că această funcţie satisface inegalitatea impusă şi că $f(\ell-1) - f(0) = \frac{\ell-2}{\ell} - (-1) = 2 - \frac{2}{\ell}$.

$\square$