CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A VIII-A

Problema 1. Determinaţi numerele reale x ştiind că $\frac{n}{3n+1} < x < \frac{4n+1}{2n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2. Fie $k \geq 2$ un număr natural şi $x_1, x_2, \ldots, x_k \in (0,1)$ numere reale. De asemnea, fie $m_1, m_2, \ldots, m_k$, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ numere întregi. Definim

$$A = x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{m_k},\ B = x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$$

şi

$$\begin{aligned} C &= x_1^{\min(m_1,n_1)} \cdot x_2^{\min(m_2,n_2)} \cdot \ldots \cdot x_k^{\min(m_k,n_k)} \\ D &= x_1^{\max(m_1,n_1)} \cdot x_2^{\max(m_2,n_2)} \cdot \ldots \cdot x_k^{\max(m_k,n_k)}. \end{aligned}$$

Să se demonstreze că

$$A + B \leq C + D.$$

Când are loc egalitatea?

Problema 3. În spațiu sunt date două pentagoane regulate $ABCDE$ și $AEKPL$, astfel încât $\angle DAK = 60°$. Notăm cu M, N şi S mijloacele segmentelor AE, CD şi respectiv EK.

a) Să se arate că triunghiul NMS este dreptunghic.

b) Să se demonstreze că planele (ACK) și (BAL) sunt perpendiculare.

Problema 4. a) Să se arate că oricare ar fi numerele naturale nenule a, b, c există un număr natural nenul N astfel încât

$$\left(N + a^2\right)\left(N + b^2\right)\left(N + c^2\right)$$

este pătrat perfect.

b) Arătaţi că există cinci numere naturale nenule distincte a, b, c, d, e pentru care există un număr natural nenul N astfel încât

$$\left(N + a^2\right)\left(N + b^2\right)\left(N + c^2\right)\left(N + d^2\right)\left(N + e^2\right)$$

să fie pătrat perfect.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.