Colegiul Naţional „Carol I”, Craiova

Concursul interjudeţean de matematică

„ION CIOLAC”

Ediţia a XVII-a

8 aprilie 2017

Clasa a IV-a

Problema 1

Să se calculeze suma resturilor obţinute la împărţirea la 15 a tuturor numerelor naturale mai mari decât 1000, dar mai mici decât 2017.

C.d.p.

Problema 2

Suma a patru numere este 868. Diferenţa dintre primele două numere este 32. Câtul dintre suma primelor două numere şi al treilea număr este 4 şi restul 12. Al patrulea număr este cu 16 mai mare decât dublul celui de-al treilea număr..
Aflaţi cele patru numere.

Prof. Georgescu Carmen, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3

Dintr-un pachet de cărţi de joc se scot două cărţi. Ce valori au aceste cărţi, dacă suma punctelor de pe cărţile rămase în pachet (Asul se consideră 1, Valetul 12, Dama 13, Regele 14) este 349?

Gazeta Matematică 6-7-8/2014

Clasa a V-a

Problema 1

Divizorii numărului $A = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ sunt scriși în ordine crescătoare: $d_1 = 1;\ d_2 = 2;\ d_3 = 3; \dots$.
Determinați valoarea lui d_{51}.

Problema 2

Fie mulțimea $M = \{7 \cdot k + 1 |\ k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq 19\}$. Arătați că orice submulțime cu 12 elemente a mulțimii M conține două elemente a căror sumă este 142.

Problema 3

Conform unui program, în fiecare secundă numărul afișat pe ecranul unui calculator se înmulțește sau se împarte fie cu 2, fie cu 3 și rezultatul este afișat. La un moment dat pe ecran a apărut numărul 12. Arătați că după exact un minut din acel moment numărul afișat nu poate fi 54.

Clasa a VI-a

Problema 1

Determinați numerele naturale n care verifică relația $\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{2018}{2017}$, unde $\sigma(n)$ reprezintă suma divizorilor lui n.

Revista Țițeica

Problema 2

Un număr se numește „*miraculos*” dacă este egal cu suma pătratelor a doi divizori distincți ai săi.

a) Câte numere miraculoase conține mulțimea $\{10, 65, 650\}$? Justificați răspunsul.

b) Să se arate că există cel puțin 2017 numere miraculoase divizibile cu 2017.

Prof. Luminița Popescu , C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3

În triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ pe latura BC se ia un punct arbitrar M. Latura AB se prelungeşte cu $[BD] \equiv [MC]$, iar latura AC se prelungeşte cu $[CE] \equiv [MB]$. Bisectoarele unghiurilor DBC și ECB se intersectează în Q. Arătați că MQ este bisectoarea unghiului DME.

Gazeta Matematică

Clasa a VII-a

Problema 1

Fie numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ astfel încât

$$\frac{a_1^2}{1+a_1^2} = \frac{a_2^2}{2+a_2^2} = \cdots = \frac{a_n^2}{n+a_n^2} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{a_1^2} + \frac{2}{a_2^2} + \cdots + \frac{n}{a_n^2} = n$$

a. Rezolvaţi ecuaţia

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \cdot x = \frac{1}{a_1^2 \cdot a_2^2} + \frac{1}{a_2^2 \cdot a_3^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2 \cdot a_{n+1}^2}$$

şi demonstraţi că $\frac{2}{x}$ este pătratul unui număr natural.

b. Demonstraţi că

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{n^2 + 3n}{4}, (\forall) n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$$

Prof. Georgescu Carmen, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 2

a. Demonstraţi că dacă $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ şi $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}_+$ atunci $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}_+$

b. Determinaţi numerele naturale *x,y* pentru care $\sqrt{x^2 + y + 1} + \sqrt{y^2 + x + 4}$ este un număr natural.

***

Problema 3

Se consideră triunghiul *ABC* în care $m(\sphericalangle A) = 135°$. Perpendiculara în *A* pe dreapta *AB* intersectează latura $|BC|$ în punctul *D*, iar bisectoarea unghiului B intersectează latura $|AC|$ în punctul *E*.

a. Să se determine $m(\sphericalangle BED)$

b. Dacă în plus, $m(\sphericalangle B) = 30°$, demonstraţi că $\frac{DE}{BD} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Traian Preda, Bucureşti, Gazeta Matematică

Clasa a VIII-a

Problema 1

Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{2x - x^2 + 15} - |y - 1| = 4$.

Problema 2

Pe planul triunghiului isoscel ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^{\circ}$ se ridică perpendiculara în O mijlocul segmentului $[BC]$ pe care se ia un punct V, astfel încât $OV = OA$. Dacă D este mijlocul lui $[AB]$ și E este mijlocul $[VC]$, aflați măsura unghiului determinat de planele (VOD) și (AOE).

Problema 3

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $a^2+b^2 = 1$. Arătați că $ab(a + 2b) < \frac{3}{2}$.

Clasa a IX-a

Problema 1

Arătați că $\frac{1}{9a} + \frac{1}{9b} + \frac{10}{a+b} \geq \frac{121}{7} \cdot \left(\frac{1}{2a+5b} + \frac{1}{2b+5a}\right)$, oricare ar fi numerele $a, b > 0$.

Mihaela Berindeanu, Gazeta Matematică

Problema 2

Demonstrați că ecuația $x^8 + y^8 = 2017^{2017} - 1$ nu are soluții în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Prof. Raluca Ciurcea, C. N. „Carol I”, Craiova

Problema 3

Considerăm un cerc de centru O, $[BC]$ un diametru fix al acestuia și un punct fix *A* pe cerc diferit de *B* și *C*. Fie punctele mobile $M, N \in [BC]$ astfel încât $[OM] \equiv [ON]$. Dacă dreapta *AM* taie a doua oară cercul în *P*, iar dreapta *AN* taie a doua oară cercul în *Q*, demonstrați că dreapta *PQ* trece printr-un punct fix.

***

Clasa a X-a

Problema 1

Fie $n \geq 2$ natural și $z_1, z_2, \dots, z_n \in C$. Demonstrați că:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \geq Im(z_1 z_2 + z_2 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n + z_n z_1).$$

Gazeta Matematică

Problema 2

Determinați soluțiile reale ale sistemului:

$$\begin{cases} (x+y)^{3x-y} = 243 \\ log_3^2(x+y) = x - y \end{cases}$$

***

Problema 3

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\sqrt[2018]{x-2} + \sqrt[2018]{4-x} - \sqrt[2018]{x-3} = 2$$

***

Clasa a XI-a

Problema 1

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir crescător și convex de numere reale. Demonstrați că

a). șirul $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ are limită;

b). șirul $\left(\frac{a_n}{\ln n}\right)_{n\geq 2}$ are limită;

(Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convex dacă $a_{n+1} \leq \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \forall n \geq 1$)

Prof. Sorin Pușpană, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 2

Fie $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcție derivabilă cu proprietatea că există $A > 0$ astfel încât $|f'(x)| \leq Af(f(x)), \forall x \geq 0$.
Demonstrați că dacă $f(0) = 0$ atunci f nu este injectivă.

Prof. Sorin Pușpană, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3

a). Dați exemplu de două matrice $A, B \in M_n(C), n \geq 2,$ pentru care există $a, b \in C^*$, astfel încât $AB = aA + bB.$

b). Arătați că oricare două astfel de matrice comută.

***

Clasa a XII-a

Problema 1

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel şi $a, b \in A$ astfel încât $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ şi $(a+b)^3 = a^3 + b^3$.
Să se arate că $(a+b)^n = a^n + b^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

George Stoica, Gazeta Matematică

Problema 2

Să se arate că $\int_0^1 \sqrt{arctgx}dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{4}}\left(1 - \frac{\pi}{12}\right).$

Prof. Cătălin Spiridon, Revista Ţiţeica

Problema 3

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{n^2} \frac{arctgx \cdot \ln x}{x(x^2+n^2)} dx.$

Prof. Cătălin Spiridon, C.N. „Carol I”, Craiova

Soluţii şi bareme de corectare

Clasa a IV-a

Problema 1

Numerele naturale mai mari de 1000 dar mai mici de 2017 alcătuiesc mulţimea $\{1001,1002,\dots,2016\}$ **1p**
Resturile posibile la împărţirea la 15 sunt 0,1,2,3.4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14 şi au cu suma 105 .... **1p**
Sunt 2016-2010=1016 numere consecutive pe care le împărţim la 15. Vor fi efectuate 67 de împărţiri cu resturile 0,1,2,3.4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14 (1016:15=67 rest 11). Celelalte 11 împărţiri sunt pentru numerele 1001 (rest 11), 1002 (rest 12), 1003 (rest 13), 1004 (rest 14), 2010 (rest 0), 2011 (rest 1), 2012 (rest 2), 2013 (rest 3), 2014 (rest 4), 2015 (rest 5), 2016 (rest 6). **3p**
S=67x105+11+12+13+14+0+1+2+3+4+5+6=7106 .... **2p**

Problema 2

Considerăm al treilea număr c reprezentat $\underline{u}$
Considerăm a şi b primele numere. Prin proba împărţirii $a+b=\underline{u}\,\underline{u}\,\underline{u}\,\underline{u}\,\underline{12}$
Al patrulea număr d se reprezintă $\underline{u}\,\underline{u}\,\underline{16}$
$a+b+c+d=868\quad adica\quad \underline{u}\,\underline{u}\,\underline{u}\,\underline{u}\,\underline{12}\,\underline{u}\,\underline{u}\,\underline{u}\,\underline{16}$ **1p**
$868-(12+16)=868-28=840$ (suma a 7 părţi egale) **1p**
Aflarea lui $\underline{u}$ 840:7 = 120 este al treilea număr **1p**
Aflarea lui $\underline{u}\,\underline{u}\,\underline{16}$ 120+120+16 = 256 este al patrulea număr **0,5p**
Aflarea sumei primelor numere $\underline{u}\,\underline{u}\,\underline{u}\,\underline{u}\,\underline{12}$ 120+120+120+120+12 = 492 ....**0,5p**
Primul număr a se reprezintă $\underline{o}\ \underline{32}$, al doilea b se reprezintă $\underline{o}$, $a+b=492$ **1p**
$492-32=460$ (două părţi) **1p**
Aflarea lui b, al doilea număr 460:2 = 230 ....**0,5p**
Aflarea lui a, primul număr $\underline{o}\ \underline{32}=230+32=262$ **0,5p**

Problema 3

Într-un pachet de cărţi sunt câte 4 cărţi cu aceeaşi valoare. Valorile cărţilor sunt 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13, 14 (lipseşte 11 deoarece asul are valoarea 1) **1p**
Suma tuturor punctelor de pe toate cărţile de joc este S = 4 x (1+2+...+10+12+13+14), adică
S=4 x (1+2+...+10+11+12+13+14) - 4 x 11 = 376 .... **2p**
Deoarece suma cărţilor extrase e 349 atunci cărţile extrase vor avea suma punctelor 376 - 349 = 27 .... **2p**
Dar suma de 27 nu se poate obţine, în cazul cărţilor de joc, decât din 13+14, adică Damă şi Rege sunt cele două cărţi extrase **2p**

Clasa a V-a

Problema 1

Numărul divizorilor lui A este 60...**1p**
Avem că $d_k\cdot d_{61-k}=A, k=\overline{1,60}$...**3p**
Rezultă că $d_{51}\cdot d_{10}=10800$...**1p**
Avem că $d_{10}=12$...**1p**
Deci $d_{51}=\frac{10800}{12}=900$ **1p**

Problema 2

Fie mulțimile $M_1 = \{8; 134\}, M_2 = \{15; 127\}, \dots, M_8 = \{57; 85\}, M_9 = \{64; 78\}, M_{10} = \{1\}, M_{11} = \{71\}$ care partajază mulțimea M în 11 submulțimi... ……...**3p**
Conform principiului lui Dirichlet, oricum am alege 12 elemente din M printre ele există 2 care vor aparține aceleiași submulțimi, una dintre $M_1, M_2, \dots, M_8, M_9$ **3p**
Suma acestor două elemente este 142………………………….……………………….……........**1p**

Problema 3

$12 = 2^2 \cdot 3$…………….. …………………………………………………..…………………..…………**1p**
Pornind de la $12 = 2^2 \cdot 3$ la fiecare secundă exponentul lui 2 sau exponentul lui 3 se modifică cu o unitate, așadar suma exponenților își modifică paritatea la fiecare secundă………………………………..………....**2p**
Prin urmare, după un număr par de secunde suma exponenților are aceeași paritate cu suma exponenților lui $12 = 2^2 \cdot 3$, adică este un număr impar ………………..….........………………………………….....**2p**
Suma exponenților lui $54 = 2 \cdot 3^3$ este un număr par, deci după exact 60 de secunde pe ecran nu poate să apară numărul 54……………………………………………………………………..……………..……....**2p**

Clasa a VI-a

Problema 1

Dacă $n = 2017$, 2017 este număr prim, deci $\sigma(n) = 1 + 2017$ și egalitatea este verificată **2p**
Dacă $n \neq 2017$ și $D_n = \{1, d_1, d_2, \dots d_k, n\}$ este mulțimea divizorilor lui n atunci $\sigma(n) = 1 + n + (d_1 + d_2 + \dots + d_k)$ egalitatea devine $2017 + 2017(d_1 + d_2 + \dots + d_k) = n$ deci $n \vdots 2017 \Longrightarrow n = 2017p$ **2p**
Din $p \in \{d_1, d_2, \dots d_k\}$ și $1 + d_1 + d_2 + \dots + d_k = p$ obținem o egalitate imposibilă. **2p**
Deci $n = 2017$ unica soluție. **1p**

Problema 2

a) $10 = a^2 + b^2, a, b \in D_{10}, a^2 \leq 10, b^2 \leq 10 \Longrightarrow a, b \in \{1,2\} \Longrightarrow a^2 + b^2 \leq 5 < 10$ deci 10 nu este „*miraculos*" **1p**
$65 = a^2 + b^2, a, b \in D_{65}, a^2 \leq 65, b^2 \leq 65 \Longrightarrow a, b \in \{1,5\} \Longrightarrow a^2 + b^2 \leq 26 < 65$ deci 65 nu este „*miraculos*" **1p**
$650 = 25^2 + 5^2$, $25|650$, $5|650$, deci 650 este „*miraculos*" **1p**
b) $n = a^2 + b^2, a, b \in D_n \Longrightarrow a|b^2, b|a^2$. **1p**
$2017 = 44^2 + 9^2$.... ....**1p**
$2017 \cdot 44^2 \cdot 9^2 = (44^2 \cdot 9)^2 + (9^2 \cdot 44)^2$ deci $2017 \cdot 44^2 \cdot 9^2$ este un număr „*miraculos*" divizibil cu 2017 " **1p**
$2017 \cdot 44^2 \cdot 9^2 \cdot k^2 = (44^2 \cdot 9 \cdot k)^2 + (9^2 \cdot 44 \cdot k)^2, k \in \mathbb{N}$ sunt numere „*miraculoase*" divizibile cu 2017 " **1p**

Problema 3

ΔABC isoscel $\Longrightarrow \Delta BQC$ isoscel ($[BQ] \equiv [QC]$) ……………:…………………………………………………**1p**
$\Delta MCQ \equiv \Delta DBQ(L.U.L.) \Longrightarrow [DQ] \equiv [MQ](1)$, $m(\widehat{CMQ}) = m(\widehat{BDQ})$ (2)……………………………………**1,5p**
$\Delta BDM \equiv \Delta CME(L.U.L.) \Longrightarrow m(\widehat{CME}) = m(\widehat{BDM})(3)$ ……………:…………………………………………**1,5p**
Din (2) şi (3) avem $m(\widehat{MDQ}) = m(\widehat{QME})(4)$……………………………………………………………… **1p**
Din (1) avem $m(\widehat{MDQ}) = m(\widehat{QMD})(5)$……………………………………………………………………**1 p**
Din (4) şi (5) avem $m(\widehat{QMD}) = m(\widehat{QME})$ deci (MQ bisectoarea unghiului DME… ……………………**1p**

Clasa a VII-a

Problema 1

a. Inversând rapoartele
$\frac{1}{a_1^2} + 1 = \frac{2}{a_2^2} + 1 = \frac{3}{a_3^2} + 1 = \cdots = \frac{n}{a_n^2} + 1 \Rightarrow \frac{1}{a_1^2} = \frac{2}{a_2^2} = \frac{3}{a_3^2} = \cdots = \frac{n}{a_n^2}$. atunci
$n \cdot \frac{1}{a_1^2} = n \Rightarrow a_1^2 = 1\ (a_1 > 0) \Rightarrow a_1 = 1$ ……………………………………………………………… **1p**
$\frac{n}{a_n^2} = 1 \Rightarrow a_n^2 = n\ (a_n > 0) \Rightarrow a_n = \sqrt{n}$……………………………………………………………… **1p**
$(1 + 2 + \cdots + n) \cdot x = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ ……………………………………………… **1p**
$\frac{n\cdot(n+1)}{2} \cdot x = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ……………………………………………… **1p**
$\frac{n\cdot(n+1)}{2} \cdot x = \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 \cdot x = 2 \Rightarrow \frac{2}{x} = (n+1)^2$ ……………………………………… **1p**
b. Folosim inegalitatea mediilor $\sqrt{1 \cdot a_n} < \frac{1+a_n}{2}$, strictă pentru $a_n \neq 1$:
$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{1\cdot 1} \le \frac{1+1}{2} \\ \sqrt{1\cdot 2} < \frac{1+2}{2} \\ \ldots \\ \sqrt{1\cdot n} < \frac{1+n}{2} \end{array}\right| \Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{n + (1+2+\cdots+n)}{2}$$ ……………………………………………… **1p**
$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{n + \frac{n(n+1)}{2}}{2} = \frac{n^2+3n}{4}$ ……………………………………………………………… **1p**

Problema 2

a.
$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ ……………………………………………………………… **1p**
$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a} + \sqrt{b} = 2\sqrt{a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ ……………………………………… **1p**
b.
$\sqrt{x^2 + y + 1} + \sqrt{y^2 + x + 4} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y + 1}, \sqrt{y^2 + x + 4} \in \mathbb{N}$……………………………… **1p**
$\Rightarrow x^2 + y + 1, y^2 + x + 4$ sunt pătrate perfecte ……………………………………………………………… **1p**
Deoarece $x^2 + y + 1 > x^2$ și $x^2 + y + 1$ este pătrat perfect rezultă $x^2 + y + 1 \ge (x+1)^2$ şi analog $y^2 + x + 4 \ge (y+1)^2$ ……………………………………………………………………………… **1p**
Prin sumare obținem $x + y \le 3$……………………………………………………………………… ..**1p**

Soluţiile sunt $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$ ……………………………………………………………… **1p**

Problema 3

a. Semidreapta *AC* este bisectoarea exterioară a triunghiului *ABD*, iar semidreapta *BE* este bisectoarea interioară a triunghiului *ABD* . Rezultă că semidreapta *DE* este bisectoarea exterioară a triunghiului *ABD*. **1p**

Dacă în plus, $m(\sphericalangle ABE) = m(\sphericalangle EBD) = a, m(\sphericalangle ADE) = m(\sphericalangle EDC) = b,$ şi $m(\sphericalangle BED) = x$, avem $b = a + x$ şi $2b = 2a + 90°$ (proprietatea unghiului exterior în triunghiurile *BDE* şi *ABD*). Rezultă $2x = 90°$, deci $x = 45°$. **1p**

b. $\Delta MDE \sim \Delta EDA\ (U.U.) \Rightarrow \frac{DE}{MD} = \frac{AD}{DE}$, deci $DE^2 = AD \cdot MD$. **1p**

Din teorema bisectoarei, aplicată în ΔABD obţinem $\frac{MD}{AM} = \frac{BD}{AB}$ echivalent cu $\frac{MD}{AM+MD} = \frac{BD}{BD+AB}$ **1p**

de unde obţinem $MD = \frac{AD \cdot BD}{BD+AB}$. Prin urmare $DE^2 = \frac{AD^2 \cdot BD}{BD+AB}$. **1p**

Cum $m(\sphericalangle B) = 30°$, avem $AD = b, AB = b\sqrt{3}, BD = 2b$, deci $DE^2 = 2(2-\sqrt{3})b^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}BD^2$, ... **1p**

adică $DE = BD\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = BD\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, prin urmare $\frac{DE}{BD} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ **1p**

Clasa a VIII-a

Problema 1

$\sqrt{2x - x^2 + 15} = 4 + |y - 1|$

$\sqrt{2x - x^2 + 15} = \sqrt{16 - (x-1)^2} \leq 4, \forall x \in \mathbb{R}$ $(\mathbf{1})$..**2p**

$4 + |y - 1| \geq 4, \forall y \in \mathbb{R}$ $(\mathbf{2})$.. .**2p**

Din $(\mathbf{1})$ și $(\mathbf{2})$ $\Rightarrow \sqrt{2x - x^2 + 15} = 4 + |y - 1| = 4$...**2p**

Finalizare: $(x, y) \in \{(1, 1)\}$..**1p**

Problema 2

Fie Fsimetricul lui A față de O. Piramida $VABFC$ este o piramidă patrulateră regulată **2p**

Fie $\{D'\} = DO \cap FC$ și $\{G\} = VD' \cap EF$. Atunci: $(VOD) \cap (AOE) = (VDD') \cap (AEF) = OG$............. **1p**

Observăm că ΔVFC este echilateral.Cum VD' și EF sunt mediane, deducem că punctul G este centrul de greutate al ΔVFC..**1p**

Din ΔVFC este echilateral și $VO = FO = CO \Rightarrow$piramida $OVFC$ este o piramidă triunghiulară regulată$\Rightarrow OG \perp (VFC)$........... ....**1p**

Cum $VD', EF \subset (VFC)$ rezultă $D'G \perp OG$ și $EG \perp OG$,deci unghiul căutat este unghiul dintre dreptele VD' și EF... ....**1p**

Deoarece măsura unghiului dintre două mediane ale unui triunghi echilateral este de 60°, rezultă că măsura unghiului dintre cele două plane este de 60°..**1p**

Problema 3

Din inegalitatea mediilor avem: $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} \Rightarrow |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ și $a^2+b^2 = 1 \Rightarrow |ab| \leq \frac{1}{2}$....................... **2p**

Aplicând CBS obţinem: $(a+2b)^2 \leq (a^2+b^2)(1^2+2^2) \Rightarrow |a+2b| \leq \sqrt{5}$.. **2p**

Din $|ab| \leq \frac{1}{2}$ și $|a+2b| \leq \sqrt{5}$ $\Rightarrow |ab(a+2b)| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$... **2p**

Finalizare : $ab(a+2b) \leq \frac{\sqrt{5}}{2} < \frac{3}{2}$...**1p**

Clasa a IX-a

Problema 1

Prelucrăm inegalitatea de demonstrat, găsind succesiv formele echivalente:

$\left(\frac{a+b}{9ab}+\frac{10}{a+b}\right)\cdot\frac{(2a+5b)\cdot(2b+5a)}{a+b}\geq 121$..**1p**

$\left(\frac{a+b}{9ab}+\frac{10}{a+b}\right)\cdot\frac{10a^2+10b^2+29ab}{a+b}\geq 121$ **1p**

$\left(\frac{a+b}{9ab}+\frac{10}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{9ab}{a+b}+10(a+b)\right)\geq 11^2$..**1p**

Aceasta rezultă din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz aplicată pentru seturile de numere $\sqrt{\frac{a+b}{9ab}}$, $\sqrt{\frac{10}{a+b}}$, respectiv $\sqrt{\frac{9ab}{a+b}}$, $\sqrt{10(a+b)}$...**3p**

Egalitatea are loc dacă și numai dacă numerele care formează cele două seturi sunt respectiv proporționale, ceea ce este echivalent cu $\frac{a}{b}\in\left\{\frac{7-3\sqrt{5}}{2},\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right\}$ **1p**

Problema 2

Vom demonstra că egalitatea nu poate avea loc datorită faptului că cei doi membri nu pot da niciodată același rest prin împărțirea la 17. În acest scop folosim mica teoremă a lui Fermat:
dacă $x\in\mathbb{Z}$ nu este divizibil cu 17, atunci $x^{16}-1=(x^8-1)\cdot(x^8+1)\vdots 17$..**2p**
Prin urmare pentru oricare $x\in\mathbb{Z}$, restul pe care îl dă prin împărțire la 17 numărul x^8 este un element al mulțimii $\{0,1,16\}$..**1p**
Astfel, pentru oricare $x,y\in\mathbb{Z}$, restul pe care îl dă prin împărțire la 17 numărul x^8+y^8 este un element al mulțimii $\{0,1,2,15,16\}$...**1p**
2017 nu este divizibil cu 17, deci $2017^{16}-1\vdots 17$..**1p**
$2016\vdots 16$, deci $2017^{2016}-1\vdots 17$ și $2017^{2017}-2017\vdots 17$, deci $2017^{2017}-1=2017^{2017}-2017+$ $+2016$ va da prin împărțire la 17 același rest ca 2016, adică 10..**1p**
Prin urmare egalitatea nu este posibilă, oricare ar fi perechea $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **1p**

Problema 3

Fie $PQ\cap BC=\{R\}$. Vom demonstra că acesta este punct fix în condițiile problemei. Puterea punctului R față de cercul dat este $RB\cdot RC=RQ\cdot RP$..**1p**

$\frac{RB}{RC}=\frac{RB\cdot RC}{RC^2}=\frac{RQ\cdot RP}{RC^2}=\frac{RQ}{RC}\cdot\frac{RP}{RC}$...**1p**

Din teorema sinusurilor în triunghiurile RCQ și RPC obținem $\frac{RQ}{RC}\cdot\frac{RP}{RC}=\frac{\sin\widehat{RCQ}}{\sin\widehat{RQC}}\cdot\frac{\sin\widehat{RCP}}{\sin\widehat{RPC}}$............................**1p**

Folosind formula $\sin x=\sin(\pi-x)$ și faptul că patrulaterele $ACQB$, $ACQP$ și $ACPB$ sunt inscriptibile obținem $\frac{\sin\widehat{RCQ}}{\sin\widehat{RQC}}\cdot\frac{\sin\widehat{RCP}}{\sin\widehat{RPC}}=\frac{\sin\widehat{BAQ}}{\sin\widehat{PAC}}\cdot\frac{\sin\widehat{BAP}}{\sin\widehat{QAC}}$ **2p**

Ținând cont că $[OM]\equiv[ON]$ rezultă $[BM]\equiv[CN],[CM]\equiv[BN]$ de unde $\sigma[BAN]=\sigma[CAM],\sigma[BAM]=\sigma[CAN]$, deci $\frac{RB}{RC}=\frac{\sin\widehat{BAQ}}{\sin\widehat{PAC}}\cdot\frac{\sin\widehat{BAP}}{\sin\widehat{QAC}}=\frac{2\sigma[BAN]}{AB\cdot AN}\cdot\frac{AC\cdot AM}{2\sigma[CAM]}\cdot\frac{2\sigma[BAM]}{AB\cdot AM}\cdot\frac{AC\cdot AN}{2\sigma[CAN]}=\frac{AC^2}{AB^2}$, deci punctul fix este R......**2p**

Clasa a X-a

Problema 1

Fie $z_k=a_k+ib_k$, k=1, 2, … , n și $a_{n+1}=a_1,b_{n+1}=b_1$.. **1p**
$Im(z_1z_2+z_2z_3+\ ...+z_{n-1}z_n+z_nz_1)=\sum_{k=1}^{n}(a_kb_{k+1}+a_{k+1}b_k)$... **2p**

Inegalitatea devine:
$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_{k+1}^2 \geq 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} b_k$ **2p**
$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_{k+1})^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - b_k)^2 \geq 0$ **2p**

Problema 2

Condiții: $x + y > 0,\ x - y > 0$ **(**dacă $x - y = 0 \Rightarrow log_3(x+y) = 0 \Rightarrow x + y = 1$, fals!)

Sistemul este echivalent cu $\begin{cases}(3x-y)log_3(x+y) = 5\\ log_3^2(x+y) = x - y\end{cases}$ **(1)** **1p**

Notăm $log_3(x+y) = z \in R \Leftrightarrow x + y = 3^z$ **1p**

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases}(3x-y)z = 5 & (2)\\ z^2 = x - y & (3)\\ x + y = 3^z & (4)\end{cases}$ **1p**

(3), (4) $\Rightarrow x = \frac{3^z+z^2}{2}$, $y = \frac{3^z-z^2}{2}$ **1p**

(2) $\Rightarrow (3^z + 2\cdot z^2)\cdot z = 5 \Rightarrow f(z) = 5$ **1p**

unde $f: (0,\infty) \to R, f(z) = (3^z + 2\cdot z^2)\cdot z$

(nu avem soluții pentru $z \leq 0$) **1p**

f fiind strict crescătoare rezultă soluția unică $z = 1$, de unde $x = 2, y = 1$ **1p**

Problema 3

Funcția $f: (0,\ \infty) \to R, f(t) = t^{2018}$ este convexă $\Rightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, (\forall) a, b \in (0,\ \infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2018} \leq \frac{a^{2018}+b^{2018}}{2}$ (1) **2p**

Condiții $\Rightarrow x \in [3, 4]$ **1p**

În (1) facem înlocuirile: $a = \sqrt[2018]{x-2},\ b = \sqrt[2018]{4-x}$. Obținem:

$\left(\frac{\sqrt[2018]{x-2}+\sqrt[2018]{4-x}}{2}\right)^{2018} \leq \frac{x-2+4-x}{2} = 1$ **2p**

$\Rightarrow \sqrt[2018]{x-2} + \sqrt[2018]{4-x} \leq 2 \leq 2 + \sqrt[2018]{x-3}$.

Deoarece avem egalitate $\Rightarrow x = 3$, soluție unică **2p**

Clasa a XI-a

Problema 1

a). Din $a_{n+1} \leq \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \forall n \geq 1,$ rezultă că șirul $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}$ crescător, deci are limita $l \in \overline{R}$ **1p**

Dar $a_{n+1} - a_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1-n}$ și conform Lemei Stolz-Cesaro $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = l$ **1p**

b). Avem $a_{n+2} - a_{n+1} \geq a_{n+1} - a_n \geq \frac{n}{n+1}(a_{n+1} - a_n)$ **1p**

Razultă că șirul $(n(a_{n+1} - a_n))_{n\geq 1}$ este crescător, deci are limita $l \in \overline{R}$ **1p**

Dar $n(a_{n+1} - a_n) = \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, unde $b_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1}, n \geq 2$ **1p**

Conform Lemei Stolz-Cesaro $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ **1p**

Se demonstrează că $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\ln n}=1$ și că aceasta implică $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\ln n}=l$ **1p**

Problema 2

Vom arăta că există $\alpha>0$ astfel încât $|f'(x)|\le 1, \forall x\in[0,\alpha]$. Întradevăr, în caz contrar, pentru un șir $(\alpha_n)_n$ descrescător la zero există un șir $(x_{\alpha_n})_n, x_{\alpha_n}\in(0,\alpha_n)$ astfel încât $|f'(x_{\alpha_n})|>1, \forall n.$

Obținem atunci $Af(f(x_{\alpha_n}))>1, \forall n$ iar prin trecere la limită după n obținem $0\ge 1$ fals……………….……..**3p**

Avem deci $|f'(x)|\le 1, \forall x\in[0,\alpha]$. Din $f'(x)\le|f'(x)|\le 1, \forall x\in[0,\alpha]$ rezultă că funcția $g(x)=f(x)-x$ este descrescătoare pe $[0,\alpha]$ de unde rezultă $f(x)\le x, \forall x\in[0,\alpha]$.

Avem deci $0\le f(x)\le x\le\alpha, \forall x\in[0,\alpha]\Rightarrow f([0,\alpha])\subseteq[0,\alpha]$ deci $f(f(x))\le f(x), \forall x\in[0,\alpha]$……………..…**2p**

Obținem astfel $|f'(x)|\le Af(x), \forall x\in[0,\alpha]$.

Din $f'(x)\le|f'(x)|\le Af(x), \forall x\in[0,\alpha]$ obținem că funcția $h(x)=e^{-Ax}f(x)$ este descrescătoare pe $[0,\alpha]$ iar din $h(x)\le h(0)$ obținem $f(x)\le 0, \forall x\in[0,\alpha]$ deci $f(x)=0, \forall x\in[0,\alpha]$ de unde rezultă concluzia..................…..**2p**

Problema 3

a). $A=B=I_n, a=b=\frac{1}{2}$ …………………………………………………………………………....**1p**

b). $AB-aA-bB=O_n\Rightarrow AB-aA-bB+abI_n=abI_n\Rightarrow(A-bI_n)(B-aI_n)=abI_n(*)$………………….…..…**2p**

Rezultă $\det(A-bI_n)(B-aI_n)=(ab)^n\ne 0\Rightarrow\det(A-bI_n)\ne 0$ deci matricea $A-bI_n$ este inversabilă………..**1p**

Înmulțind $(*)$ la stânga cu $(A-bI_n)^{-1}$ obținem $B-aI_n=ab(A-bI_n)^{-1}$...**1p**

și înmulțind la dreapta cu $A-bI_n$, obținem $(B-aI_n)(A-bI_n)=abI_n\Rightarrow BA=aA+bB\Rightarrow AB=BA$............**2p**

Clasa a XII-a

Problema 1

Din $(a+b)^2=a^2+b^2$ rezultă că $ab=-ba$. Deci, $ab^2=abb=-bab=b^2a$…………………….…...... **1p**

Cum $a^3+b^3=(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+b^2)=a^3+ab^2+ba^2+b^3\Rightarrow$
$ab^2=-ba^2=-baa=aba=-a^2b\Rightarrow a^2b=-ab^2=-b^2a$……………………………..……….…... **2p**

Arătăm prin inducţie că $a^nb=-b^na, (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

Proprietatea este adevărată pentru $n=1$ şi $n=2$. Presupunem că $a^kb=-b^ka,\ k\in\mathbb{N}^*$ şi arătăm că $a^{k+1}b=-b^{k+1}a$.

$$a^{k+1}b=a^k(ab)=-a^kba=b^ka^2=b^{k-1}ba^2=-b^{k-1}ab^2=-b^{k-1}b^2a=-b^{k+1}a$$

Deci, $a^nb=-b^na, (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.. **2p**

Arătăm prin inducţie că $(a+b)^n=a^n+b^n, (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

Proprietatea este adevărată pentru $n\in\{1,2,3\}$. Presupunem că $(a+b)^k=a^k+b^k,\ k\in\mathbb{N}^*$ şi arătăm că $(a+b)^{k+1}=a^{k+1}+b^{k+1}$.

$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)=(a^k+b^k)(a+b)=a^{k+1}+a^kb+b^ka+b^{k+1}=a^{k+1}+b^{k+1}$.

Deci, $(a+b)^n=a^n+b^n, (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$... **2p**

Problema 2

Fie $f:[0,1]\to\left[0,\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right], f(x)=\sqrt{\mathrm{arctg}x}\Rightarrow f$ bijectivă **1p**

Avem că $f^{-1}: \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{4}}\right] \to [0,1], f^{-1}(x) = \mathrm{tg}(x^2)$ **1p**

Conform identității Young, rezultă că:

$\int_0^1 \sqrt{\mathrm{arctg}x}dx + \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \mathrm{tg}(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{\mathrm{arctg}x}dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \mathrm{tg}(x^2)dx$...**2p**

Arătăm că $\mathrm{tg}x \geq x, (\forall)x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Fie $g: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, g(x) = \mathrm{tg}x - x \Rightarrow g'(x) = \mathrm{tg}^2 x \geq 0, (\forall)x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow g$ crescătoare pe $[0, \frac{\pi}{4}]$

şi deci, $g(x) \geq g(0) = 0, (\forall)x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Leftrightarrow \mathrm{tg}x \geq x, (\forall)x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. **2p**

Deci, $\int_0^1 \sqrt{\mathrm{arctg}x}dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \mathrm{tg}(x^2)dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}\left(1 - \frac{\pi}{12}\right)$............. **1p**

Problema 3

Fie $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ și funcţiile $f_n, g_n: [1, n^2] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\mathrm{arctg}x}{x}$ și $g_n(x) = \frac{\ln x}{x^2+n^2}$, continue pe $[1, n^2]$ și $g_n(x) \geq 0, (\forall)\ x \in [1, n^2]$. Din teorema de medie, există $c_n \in [1, n^2]$ astfel încât $\int_1^{n^2} f_n(x) \cdot g_n(x)dx =$
$= f_n(c_n) \cdot \int_1^{n^2} g_n(x)dx$..**1p**

Fie $I_n = \int_1^{n^2} g_n(x)dx$. Cu schimbarea de variabilă $x = \frac{n^2}{t}$, obţinem că $I_n = \int_1^{n^2} \frac{\ln n^2}{t^2+n^2}dt - I_n$..................**2p**

Deci, $I_n = \frac{\ln n}{n}\mathrm{arctg}(\frac{t}{n})\Big|_1^{n^2} = \frac{\ln n}{n}\left(\mathrm{arctg}n - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0$..**1p**

Fie $h: (0, \infty) \to \mathbb{R}, h(x) = \mathrm{arctg}x - x \Rightarrow h'(x) = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0, (\forall)x > 0 \Rightarrow h$ strict descrescătoare pe $(0, \infty)$ şi deci, $h(x) < h(0) = 0, (\forall)x > 0 \Leftrightarrow \mathrm{arctg}x < x, (\forall)x > 0 \Rightarrow 0 < \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x} < 1, (\forall)x > 0$, așadar funcția f_n este mărginită **2p**

Deci, $\lim_{n\to\infty} \int_0^{n^2} \frac{\mathrm{arctg}x \cdot \ln x}{x(x^2+n^2)}dx = \lim_{n\to\infty} f_n(c_n) \cdot I_n = 0$..**1p**