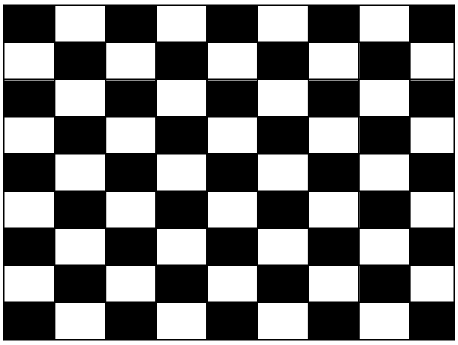
Clasa a IV-a

Problema 1

Împărțind numerele 185 și 83 prin același număr natural *a* se obțin resturile 9, respectiv 6. Aflați numărul *a*.

Problema 2

Se dă o tablă ca în figura de mai jos. În fiecare pătrățel al tablei se află o albină. La un moment dat toate albinele zboară și fiecare se așează într-un pătrățel vecin. Să se arate că există un pătrățel pe care nu s-a așezat nicio albină. (Două pătrățele sunt vecine dacă au o latură comună).



Problema 3

Un copil are 70 lei. În prima zi cheltuiește o parte din bani, iar seara tatăl îi dublează suma rămasă. A doua zi, copilul cheltuiește o parte din bani, seara tatăl dublându-i iarăși banii rămași. A treia zi, copilul cheltuiește toți banii.

Știind că în fiecare zi a cheltuit aceeași sumă de bani, aflați câți bani a primit copilul de la tatăl său în primele două seri.

Clasa a V-a

Problema 1

a) Verificați egalitatea $a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$, pentru oricare $a \in \mathbb{N}$.

b) Aflați numerele naturale *a* și *b*, știind că *b* este număr prim și are loc relația

$$a^3+3a^2+2a-183=b^b.$$

Revista „Țițeica”

Prof. Raluca Ciurcea, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 2

Un număr natural împărțit la 13 dă restul 7 și împărțit la 15 dă restul 2. Aflați restul împărțirii numărului dat la 65.

Prof. Monica Stanca, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3

Se consideră numărul $A = 7^3 + 7^4 + 7^5 + \cdots + 7^{2015}$.

a) Arătați că *A* este divizibil cu 19.
b) Arătați că *A* nu este pătrat perfect.
c) Aflați ultimele două cifre ale lui *A*.

Prof. Monica Stanca, C.N. „Carol I”, Craiova

Clasa a VI-a

Problema 1

Determinaţi numerele naturale nenule *x, y, z*, ştiind că: $x^3 + y^3 + z^3 = 1728$ şi

$$\frac{x^2}{x^2+9} = \frac{y^2}{y^2+16} = \frac{z^2}{z^2+25}.$$

„Gazeta Matematică”

Problema 2

Determinaţi perechile de numere naturale $(x;y)$ ştiind că $\frac{2}{x} + \frac{5}{2y} = 1$.

Prof. Constantin Basarab, C.N. Carol I, Craiova

Problema 3

Pe prelungirile laturilor [AB] şi [AC] ale triunghiului ABC se iau, respectiv, punctele D şi E astfel încât [BC] ≡ [BD] ≡ [CE] , B ∈ (AD) şi C ∈ (AE).
Fie {M} = BE∩CD , BP ⊥ CD , P ∈ CD , CQ ⊥ BE , Q ∈ BE şi BP ∩ CQ = {N} .
Dacă [MB] ≡ [MC] , se cere:

a) Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel;
b) Demonstraţi că A, M şi N sunt coliniare.

Prof. Constantin Basarab, C.N. Carol I, Craiova

Clasa a VII-a

Problema 1

Determinați numerele reale x, y astfel încât:

$$5\sqrt{x+y} + 2\sqrt{20-x} + 3\sqrt{18-y} = 38$$

Prof. Nicolaie Tălău, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 2

Pe o tablă sunt scrise numerele 3, 4, 5 și 6. Se poate executa următoarea operație: se aleg două numere de pe tablă a și b și se înlocuiesc cu numerele $m = a + b + \sqrt{a^2+b^2}$ și $n = a + b - \sqrt{a^2+b^2}$.

a) Demonstrați că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

b) Se poate ca după execuția operației definite în enunț de una sau mai multe ori să apară pe tablă un număr mai mic decât 1?

***

Problema 3

Fie pătratul $ABCD$, M un punct mobil pe (BC), $BP \perp AM$, $P \in AM$ și $DM \cap AB = \{N\}$. Demonstrați că NP trece printr-un punct fix.

Prof. Nicolaie Tălău, C.N. „Carol I", Craiova

Clasa a VIII-a

Problema 1

a) Să se arate că dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive atunci

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

b) Să se arate că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive și $abc = 1$ atunci

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Prof. Luminița Popescu , C.N. „Carol I", Craiova

Problema 2

Fie SABCD o piramida patrulateră regulată. $AM \perp SB$, $M \in SB$, $BN \perp SC$, $N \in SC$, $CP \perp SD$, $P \in SD$, $DQ \perp SA$, $Q \in SA$ și *R* simetricul lui *N* față de *AC*.

a) Demonstrați că punctele *B*, *R*, *Q*, *D* sunt coplanare.

b) Aflați măsura unghiului dintre dreptele *MP* și *RQ*.

„Gazeta Matematică"

Prof. V. Nicolae și P. Simion, București

Problema 3

a) Dacă a, b, c, d sunt numere naturale nenule care verifică proprietatea $ad = bc$ atunci există $p, q, r, s \in \mathbf{N}$ astfel încât $a = pq$, $b = pr$, $c = qs$, $d = rs$.

b) Arătați că nu există numere naturale a, b, c, d care verifică proprietățile $ad = bc$ și $2015^2 \leq a < b < c < d < 2016^2$.

***

Clasa a IX-a

Problema 1

Rezolvați ecuația:

$$\left[\frac{x^2-1}{6}\right]+\left[\frac{x^2+2}{6}\right]=\frac{2}{[x]},$$

unde $[a]$ semnifică partea întreagă a numărului real a.

Prof. Raluca Ciurcea, C.N. „Carol I", Craiova

Problema 2

Dacă $x, y, z > 0$, atunci

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+x)(y+z)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{3}{4} .$$

Când are loc egalitatea?

Prof. Constantin Caragea,
c. d. p.

Problema 3

Fie $ABCD$ un patrulater convex în care $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADC}$. Considerăm punctele $M \in [AB], N \in [BC], P \in [CD]$ și $Q \in [DA]$ astfel încât $[MB] \equiv [QD]$ și $[NB] \equiv [PD]$. Notăm cu R, S și T respectiv mijloacele segmentelor $[MQ], [BD]$ și $[NP]$. Demonstrați că R, S și T sunt coliniare.

Nicolae Bourbăcuț, Sarmizegetusa, Hunedoara
Gazeta Matematică

Clasa a X-a

Problema 1

Să se arate că dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ atunci $2014^{\sin x} + 2015^{\cos x} < 2015 \sin x + 2016 \cos x$.

Prof. Luminița Popescu , C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 2

Fie $A_1A_2 \dots A_n$, $n \geq 3$ un poligon convex pentru care există un punct O în interiorul său astfel încât $m(\sphericalangle A_jOA_{j+1}) = \frac{2\pi}{n}$, $\forall j \in \overline{1,n}$ $(A_{n+1} = A_1)$. Să se găsească valoarea minimă a funcției $f(M) = MA_1 + MA_2 + \dots + MA_n$, unde M este un punct oarecare din planul poligonului.

***

Problema 3

Fie funcția $f: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ pentru care expresia $mf(m) + nf(n) + 2mn$ este pătrat perfect, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $f(k) = k, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

***

Clasa a XI-a

Problema 1

a). Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent. Demonstraţi că dacă şirul $(n(a_{n+1}-a_n))_{n\geq 1}$ are limită atunci aceasta este egală cu zero.

b). Folosind, eventual, proprietatea precedentă demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\infty$.

Prof. Sorin Puşpană, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 2

Să se determine funcțiile $f:R\to R$ continue, cu proprietatea:
$f(x)+2f(3x)+f(9x)=100x^2-16x+4,\ (\forall)x\in R.$

Prof. Cristian Schneider, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3

Fie $A, B, C\in M_n(\mathbf{C})$ astfel încât $ABC=I_n$. Să se arate că dacă $I_n+A+AB,\ I_n+B+BC,\ I_n+C+CA$ sunt matrice inversabile, atunci suma inverselor lor este egală cu I_n.

Problemă Gazeta Matematică

Clasa a XII-a

Problema 1

Se consideră mulţimea $G=\left\{A(x)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\middle|A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & x\\ -2x & 1-x\end{pmatrix},\ x\in(-1,\infty)\right\}$.

a) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian în raport cu înmulţirea matricelor.
b) Să se arate că $(G,\cdot)\simeq((0,\infty),\cdot)$.
c) Să se determine $x\in\mathbb{R}$, ştiind că $A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\dots\cdot A\left(\frac{1}{2015}\right)=A(x)$.

***

Problema 2

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^{2015}\cdot\{nx\}dx$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x.

Prof. Cătălin Spiridon, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3

Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $F:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$. Să se arate că funcţia $F+f$ este mărginită dacă şi numai dacă funcţiile F şi f sunt mărginite.

Prof. Sorin Puşpană, C.N. „Carol I”, Craiova

Soluţii şi bareme de corectare

Clasa a IV-a

Problema 1

$185 = a \cdot c_1 + 9$ **şi** $83 = a \cdot c_2 + 6$, $a \geq 10$ **2p**

Deci $a \cdot c_1 = 176$ şi $a \cdot c_2 = 77$ **1p**

$a \cdot (c_1 - c_2) = 99$ **1p**

Deducem că a poate fi 11, 33, 99..**1 p**

Prin verificare 33 şi 99 nu convin...**1p**

Răspuns: $a = 11$ **1p**

Problema 2

Avem 81 pătrăţele în total, dintre care 41 negre şi 40 albe **2p**
Două pătrăţele alăturate au culori diferite **1p**
În cele 40 pătrăţele albe vin 41 albine **1p**
Pe pătrăţelele negre, rămase toate 41 libere, vor veni 40 de albine de pe alb **2p**
Concluzia..**1p**

Problema 3

Notăm cu $4a$ suma cheltuita în fiecare dintre cele trei zile.
A treia zi a cheltuit $4a$ lei, obținuți prin dublarea sumei din seara precedentă de către tatăl său **1p**
A doua seară mai avea $2a$ și a doua zi a cheltuit $4a$ lei **1p**
Așadar în prima seară mai avea $3a$ lei înainte ca tatăl său să îi dubleze suma...............**1p**
În prima zi a cheltuit $4a$ lei **1p**
Banii din prima zi $4a + 3a = 7a$ reprezintă 70 lei, deci $a = 10$ **1p**
În total a cheltuit $12 \cdot 10 = 120$ lei...**1p**
$120 - 70 = 50$ lei primiţi de la tată.. **1p**

Clasa a V-a

Problema 1

a) $(a+1)(a+2) = a^2 + a + 2a + 2 = a^2 + 3a + 2$, ...**1p**
b) Ecuația se scrie $a(a+1)(a+2) - 183 = b^b$ **1p**
$a(a+1)(a+2)$ este divizibil cu 3 pentru oricare $a \in \mathbb{N}$ **1p**
$183 \vdots 3$, de unde rezultă $b^b \vdots 3$ **1p**
b este prim, deci $b = 3$ **1p**
$a(a+1)(a+2) = 210$ și $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 5 \cdot 6 \cdot 7$ **1p**
$a = 5$ **1p**

Problema 2

$n = 13c + 7$, de unde $90n = 13c \cdot 90 + 630$ **2p**
$n = 15k + 2$, de unde $91n = 15k \cdot 91 + 182$ **2p**
$91n - 90n = 13 \cdot 15 \cdot (7k - 6c) + 182 - 630$ **1p**

$n = 65 \cdot 3 \cdot (7k - 6c) - 448$ ……………………..………………………………………………**1p**
$n = 65 \cdot (21k - 18c - 7) + 7$ și $7 < 65$, de unde rezultă că restul împărțirii lui *n* la 65 este 7 ..**1p**

Problema 3

$a) A = 7^3 \cdot (1 + 7 + 7^2) + 7^6 \cdot (1 + 7 + 7^2) + \cdots + 7^{2013} \cdot (1 + 7 + 7^2)$=
$=19 \cdot 3 \cdot (7^3 + 7^6 + \cdots + 7^{2013})$ ……………………………………………………………..….**1p**
A este divizibil cu 19 ………………………………………………………………………………**1p**
b) Ultima cifră a puterilor lui 7 poate fi 7, 9, 3 sau 1. ……...................................……………**1p**
$2013 = 4 \cdot 503 + 1$ și $U(A) = U\left(7^3 + 503 \cdot (1 + 7 + 9 + 3)\right) = 3$ ………………………………**1p**
A nu este pătrat perfect ……………………………………………………………………………**1p**
c)$A = 7^3 + 7^4 \cdot (1 + 7 + 7^2 + 7^3) + 7^8 \cdot (1 + 7 + 7^2 + 7^3) + \cdots + 7^{2012} \cdot (1 + 7 + 7^2 + 7^3) =$
$= 343 + 400 \cdot (7^4 + 7^8 + \cdots + 7^{2012})$. ..………………..…………………………………...…….……**1p**
Ultimele două cifre ale lui *A* sunt 43…………………...………..……………………….…….**1p**

Clasa a VI-a

Problema 1

$\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25} = k^2$……………………………………..…….…..………………....**2 p**

$x = 3k, y = 4k, z = 5k$………………………………………………......……….…....**2p**
$27k^3 + 64k^3 + 125k^3 = 1728$, $k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$……………...……………………………**2 p**
$x = 6, y = 8, z = 10$…………………………...……………………………………..**1p**

Problema 2

$4y + 5x = 2xy$………………………………………………………………….……..**1p**
$x = \frac{4y}{2y-5}$ …………………………………………………………………………**1p**
$2y$-$5/4y$, $2y$-$5/2y$-$5 \Longrightarrow 2y$-$5/10$…………………………………………………………….…….**2p**
$y \in \{3, 5\}$ ……………………………………………………………………………..**1p**
$y = 3 \Rightarrow x = 12$……………………………………………………………………......**1 p**
$y = 5 \Rightarrow x = 4$ ………………………………………………………………...…**1 p**

Problema 3

Desen……………………………………………………………………………….…**1 p**

a) MB = MC ⇒ Δ MBC - isoscel ⇒ ∢MBC ≡ ∢ MCB ………………………….……….**1p**
Δ BCD ≡ Δ CBE…………………………………………………………..……….**1p**
∢ABC≡ ∢ACB ⇒ Δ ABC –isoscel ……………………………………….……….....**1p**

b) ∢NBC ≡ ∢ NCB ⇒ NB = NC ……………………………………………..…….........**1p**
AB = AC, MB = MC, NB = NC ⇒ Punctele A,M,N se află pe mediatoarea lui [BC], deci sunt coliniare…………………………………………………………………..**2p**

Clasa a VII-a

Problema 1

$x + y \geq 0$, $20 - x \geq 0$ și $18 - y \geq 0$…………………………………………..………………… **0,5p**
Notăm $a = \sqrt{x + y}$, $b = \sqrt{20 - x}$ și $c = \sqrt{18 - y}$…...………………..……..……….…... **0,5p**
$5a + 2b + 3c = 38$ ....………………………………………………………...………………. **1,5p**

$a^2+b^2+c^2=38$……………………………………………………………………………1,5p
$a^2+b^2+c^2-2(5a+2b+3c)=-38$…………………………………………………………1p
$(a-5)^2+(b-2)^2+(c-3)^2=38$ ……………………………………………………………1p
$\sqrt{x+y}=5, \sqrt{20-x}=2, \sqrt{18-y}=3$…………………………………………………0,5p
$x=16, y=9$……………………………………………………………………………………0,5p

Problema 2

a) Numerele m și n sunt strict pozitive …………………………………………………0,5p
Se înlocuiesc m și n cu expresiile lor și se aduce la același numitor……………………………2,5p

b) Utilizând punctul a) rezultă că expresia $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$, unde a, b, c, d sunt cele 4 numere de pe tablă, va fi aceeași și înainte și după executarea unei operații……………**1p**
La orice pas, $\frac{1}{\min(a,b,c,d)}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}<1$……………………………2p
Deci $\min(a,b,c,d)>1$ și astfel răspunsul este *nu* ……………………………………………1p

Problema 3

Fie $NP\cap DB=\{O\}, PN\cap BC=\{T\}$

Th. Menelaos în $\triangle DBM \Rightarrow \frac{OD}{OB}\cdot\frac{TB}{TM}\cdot\frac{NM}{ND}=1$ (1) ……………………………………………1,5p

Th. Menelaos în $\triangle ABM \Rightarrow \frac{PM}{PA}\cdot\frac{NA}{NB}\cdot\frac{TB}{TM}=1$ (2)……………………………………………1,5p

Din împărțirea relațiilor (1) la (2) rezultă $\frac{OD}{OB}\cdot\frac{NM}{ND}\cdot\frac{PA}{PM}\cdot\frac{NB}{NA}=1$ (3)……………………………1p

$\triangle NBM \sim \triangle NAD \Rightarrow \frac{NM}{ND}=\frac{NB}{NA}=\frac{MB}{AD}=\frac{MB}{AB}$ (4) ……………………………………………0,5p

$\triangle ABM$ dreptunghic în $A \Rightarrow \frac{PA}{PM}=\frac{AB^2}{BM^2}$ (5)………………………………………………… 0,5p

Înlocuind (4) și (5) în (3) rezultă $\frac{OD}{OB}\cdot\left(\frac{NB}{NA}\right)^2\cdot\left(\frac{AB}{BM}\right)^2=1\Rightarrow\frac{OD}{OB}\cdot\left(\frac{BM}{AB}\right)^2\cdot\left(\frac{AB}{BM}\right)^2=1$, deci O este centrul pătratului……………………………………………………………………………2p

Clasa a VIII-a

Problema 1

a) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9 \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 6$………………………………………1p

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2, \frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2, \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$ de unde concluzia…. ……………………………………… 2p

b) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac \Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geq 0$.................................... 1p

Dacă $a, b, c>0$ atunci

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\geq(ab+bc+ca)(a+b+c)=$$
$$abc(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$ 2p

Finalizare 1p

Problema 2

a) Din congruența triunghiurilor AMB, BNC, CPD și DQA se obține $AQ\equiv BM\equiv CN\equiv DP$ de unde rezultă $NQ\parallel AC$ și $MP\parallel BD$ **(1)** 1p

Dacă $\{V\}=QR\cap AC, \{T\}=NR\cap AC$ și $NT\perp AC$, $QU\perp AC, U\in AC$ avem $TU\equiv QN$ și din congruența triunghiurilor NTC și QUA se obține $TC\equiv AU$. În triunghiul RQN avem VT linie mijlocie de unde $VT = \frac{1}{2}QN = \frac{1}{2}UT$ de unde V este mijlocul segmentului UT și prin urmare $VA = \frac{1}{2}AC$ deci $V = O$ și $OQ \equiv OR$ **(2)** **2p**

Dar punctele B, O, D coliniare și R, O, Q coliniare deci punctele B, D, Q, R coplanare.................. **1p**

b) Din relația (1) se deduce că unghiul dintre dreptele *MP* și *RQ* este unghiul dintre dreptele *BD* și *RQ*..**1p**

Din congruența triunghiurilor BQA și DQA se obține $QD \equiv BQ$. În plus $BO \equiv OD$ și $QO \equiv OR$ de unde se obține $BRDQ$ romb de unde $m(\widehat{DOQ}) = 90°$.. **2p**

Problema 3

a) Dacă $p = (a, b)$ și $s = (c, d)$ atunci există a', b', c', d' numere naturale nenule astfel încât $a = pa'$, $b = pb'$, $c = sc'$, $d = sd'$ și $(a', b') = 1$, $(c', d')=1$ și egalitatea $ad = bc$ devine $a'd' = b'c'$ ... **1p**

Din $a'd' = b'c'$ rezultă că $a' \,/\, b'c'$, dar $(a', b') = 1$ de unde $a' \,/\, c'$. Analog $c' \,/\, a'd'$, dar $(c', d') = 1$ de unde $c' \,/\, a'$ deci $a' = c' = q$. Analog $b' = d' = r$ de unde concluzia **2p**

b) Din cele demonstrate la punctul a) avem există $p, q, r, s \in \mathbf{N}$ astfel încât $a = pq$, $b = pr$, $c = qs$, $d = rs$.. **1p**

Din $2015^2 \leq pq < pr < qs < rs < 2016^2$ se obțin inegalitățile $q < r$ și $p < s$ adică $r \geq q + 1$ și $s \geq p + 1$.. **1p**

Înmulțind cele două inegalități obținem $rs \geq pq + p + q + 1 \geq 2015^2 + p + q + 1$.................. **1p**

Dar $p + q \geq 2\sqrt{pq} \geq 2 \cdot 2015$, deci $2016^2 > rs \geq 2015^2 + 2 \cdot 2015 + 1 = 2016^2$ ceea ce este imposibil, deci nu există numere cu proprietatea cerută. **1p**

Clasa a IX-a

Problema 1

$\frac{2}{[x]} \in \mathbb{Z}$, deci $[x] \in \{-2, -1, 1, 2\}$...**1p**

$\left[\frac{x^2+2}{6}\right] = \left[\frac{x^2-1}{6} + \frac{1}{2}\right]$, deci $\left[\frac{x^2-1}{6}\right] + \left[\frac{x^2+2}{6}\right] = \left[\frac{x^2-1}{3}\right]$ **2p**

Dacă $[x] = -2 \Longrightarrow \left[\frac{x^2-1}{3}\right] = -1$ și obținem $x \in (-1,1) \cap [-2, -1) = \emptyset$.................................. **1p**

Dacă $[x] = -1 \Longrightarrow \left[\frac{x^2-1}{3}\right] = -2$ și obținem $x \in \emptyset$... **1p**

Dacă $[x] = 1 \Longrightarrow \left[\frac{x^2-1}{3}\right] = 2$ și obținem $x \in \emptyset$... **1p**

Dacă $[x] = 2 \Longrightarrow \left[\frac{x^2-1}{3}\right] = 1$ și obținem $x \in [2, \sqrt{7})$.. **1p**

Problema 2

Cu inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz sau inegalitatea Titu Andreescu obținem relația

$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+x)(y+z)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+xy+yz+zx}$ **2p**

$xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3}$ **2p**

Din cele două inegalități de mai sus rezultă inegalitatea de demonstrat **1p**

Egalitatea are loc dacă și numai dacă are loc egalitatea în fiecare dintre cele două inegalități folosite **1p**

În a doua inegalitate cazul de egalitate este $x = y = z$, situație în care are loc egalitatea și în prima inegalitate folosită……………………………………………………………………………………**1p**

Problema 3

Fie $(AU$ bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}, U \in (BD) \Longrightarrow \overrightarrow{AU} = \frac{AD\cdot\overrightarrow{AB}+AB\cdot\overrightarrow{AD}}{AD+AB}$………………………… **1p**

$\overrightarrow{RS} = \frac{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{QD}}{2} = \frac{\frac{MB}{AB}\overrightarrow{AB}+\frac{QD}{AD}\overrightarrow{AD}}{2} = \frac{MB}{2\cdot AB\cdot AD}\cdot\left(AD\cdot\overrightarrow{AB} + AB\cdot\overrightarrow{AD}\right)$……………………………….. **2p**

$\overrightarrow{RS} \parallel \overrightarrow{AU} \Longrightarrow RS \parallel AU$………………………………………………………………… **1p**

Fie $(CV$ bisectoarea unghiului $\widehat{BCD}, V \in (BD)$. Analog $ST \parallel CV$ ……………………………….**1p**

Fie $AU \cap BC = \{X\}$ și $x = m(\widehat{AXB}) \Longrightarrow x = \pi - B - \frac{A}{2} = \frac{2\pi - B - D - A}{2} = \frac{C}{2}$, de unde $AU \parallel CV$ …. **1p**

Finalizare………………………………………………………………………………….**1p**

Clasa a X-a

Problema 1

Fie numărul real $a > 0$ și funcția $u{:}\,\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $u(x) = (1+a)^x$. Funcția $u(x)$ este convexă, deci pentru orice $t \in (0,1)$ se obține

$$(1+a)^t = (1+a)^{(1-t)\cdot 0 + t\cdot 1} \leq (1-t)\cdot(1+a)^0 + t\cdot(1+a)^1 = 1 + a\cdot t \text{……. } \mathbf{2p}$$

Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ atunci $\sin x, \cos x \in (0,1)$……… ……………………………...…...……..**1p**

Pentru $a = 2013$ din (*) se obține $2014^{\sin x} = (1+2013)^{\sin x} \leq 1 + 2013\cdot\sin x$

Pentru $a = 2014$ din (*) se obține $2015^{\cos x} = (1+2014)^{\cos x} \leq 1 + 2014\cdot\cos x$

Însumând cele două relații se obține $2014^{\sin x} + 2015^{\cos x} \leq 2 + 2013\sin x + 2014\cos x$…... **2p**

Dar $1 = \sin^2 x + \cos^2 x < \sin x + \cos x$ …………………………………………....………..**1p**

Finalizare ………………………………………………………………………………..**1p**

Observație: Se va acorda punctajul corespunzător și în cazul utilizarii inegalității lui Bernoulli.

Problema 2

Fie $\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ și fie $a_j = OA_j, \forall j \in \overline{1,n}$. Ne alegem reperul cartezian cu centrul în O și $A_1 \in (OX$. Atunci A_1 este de afix a_1, A_2 este de afix $a_2\omega_n$, etc. În general A_j este de afix $a_j\omega_n^{j-1}$……………………………………………………………………………………**1p**

Dacă M este de afix z atunci

$$f(M) = \sum_{j=1}^{n} |z - a_j\omega_n^{j-1}| = \sum_{j=1}^{n} |\omega_n^{j-1}(z\overline{\omega}_n^{j-1} - a_j)| = \sum_{j=1}^{n} |z\overline{\omega}_n^{j-1} - a_j|$$

……….. **2p**

Obținem că:

$$f(M) = \sum_{j=1}^{n} |z\overline{\omega}_n^{j-1} - a_j| \geq \left|\sum_{j=1}^{n}(z\overline{\omega}_n^{j-1} - a_j)\right|$$

……………… **1p**

$$\sum_{j=1}^{n}(z\bar{\omega}_n^{j-1}-a_j)=\sum_{j=1}^{n}z\bar{\omega}_n^{j-1}-\sum_{j=1}^{n}a_j=z\sum_{j=1}^{n}\bar{\omega}_n^{j-1}-\sum_{j=1}^{n}a_j=-\sum_{j=1}^{n}a_j$$

Deci $f(M)\geq \sum_{j=1}^{n}a_j$..**2p**

Egalitatea se obţine pentru $M=O$. Valoarea minimă a lui f este

$OA_1+OA_2+\cdots+OA_n$.. **1p**

Problema 3

Fie $P\subset\mathbb{N}^*$ mulţimea pătratelor perfecte. Dacă p este un număr prim, $n\in\mathbb{N}^*$ şi $\ell\in\mathbb{N}$, scriem $p^\ell\parallel n$ dacă $p^\ell\mid n$ şi $p^{\ell+1}\nmid n$. Cu alte cuvinte p^ℓ este puterea lui p care apare în descompunerea în factori primi a lui n.

Presupunând că există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $kf(k)\notin P$, atunci există p prim şi $\ell\in\mathbb{N}$ cu $p^{2\ell+1}\parallel kf(k)$. Avem că $p^{2\ell+1}\parallel kf(k)+p^{2\ell+2}f\left(p^{2\ell+2}\right)+2p^{2\ell+2}k\in P$ contradicţie. Deci $kf(k)\in P,\forall k\in\mathbb{N}^*$ ....**1,5 p**

$m=n=1\Rightarrow 2(f(1)+1)\in P\Rightarrow 2|f(1)+1\Rightarrow f(1)$ impar. Fie acum q prim impar cu $q|f(1)$. Cum $f(1)=1\cdot f(1)\in P\Rightarrow q^2|f(1)$.

$m=1,n=q\ \Rightarrow f(1)+qf(q)+2q=u^2\Rightarrow q|u^2\Rightarrow q^2|u^2$.

Obţinem că $q^2|f(1)+qf(q)+2q$ şi cum $qf(q)\in P\Rightarrow q^2|qf(q)$, avem că $q^2|2q$ $\Rightarrow q|2$ ceea ce este imposibil pentru că q este prim impar. Deci $f(1)=1$. .... **1,5 p**

$m=1\Rightarrow nf(n)+2n+1=u^2$, pentru un $u\in\mathbb{N}^*$. Cum $nf(n)\in P\Rightarrow nf(n)=g(n)^2$, $g(n)\in\mathbb{N}^*$. Deci $2n+1=u^2-g(n)^2=(u-g(n))(u+g(n))\geq g(n)+u>2g(n)$ $\Rightarrow g(n)\leq n\Rightarrow nf(n)\leq n^2\Rightarrow f(n)\leq n$.. **1,5 p**

Fie p prim oarecare. Din $pf(p)\in P\Rightarrow p|f(p)$ şi $f(p)\leq p\Rightarrow f(p)=p$............................ **0,5 p**

Fixăm $n\in\mathbb{N}^*$ şi p prim oarecare. Atunci $nf(n)+p^2+2pn=h(p)^2\in P$. Avem că $g(n)^2+p^2+2pn=h(p)^2\Rightarrow n^2-g(n)^2=(p+n)^2-h(p)^2$

$(*)$

Ştim că $n^2-g(n)^2\geq 0$. Dacă $n^2-g(n)^2>0$, atunci partea stângă a lui $(*)$ este fixă pe când partea dreaptă

$(p+n)^2-h(p)^2=(p+n-h(p))(p+n+h(p))\geq p+n+h(p)\geq p+n$

creşte oricât de mult pentru p suficient de mare. Deducem că $n^2=g(n)^2\Rightarrow f(n)=n$.......... **2p**

Clasa a XI-a

Problema 1

a).

Notăm $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in R$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_{n+1}-a_n)=l\in\overline{R}\ \Rightarrow (n+1)a_{n+1}-na_n=n(a_{n+1}-a_n)+a_{n+1}$..............**1p**

Deci şirul $(n+1)a_{n+1}-na_n$ are limită iar aceasta este egală cu $l+a$ **1p**

Din teorema Stolz-Cesaro rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{n}=l+a$ **1p**

Obţinem egalitatea $a=l+a$, deci $l=0$.. **1p**

b).

Dacă notăm $a_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$, cum acest şir este strict crescător rezultă ca el are limită...............**1p**

Să presupunem, prin absurd, ca această limită este finită, deci că şirul este convergent..................**1p**

Cum $n(a_{n+1}-a_n)=\frac{n}{n+1}$ are limită, conform rezultatului anterior, ea ar trebui să fie egală cu 0,

fals, în concluzie, presupunerea facută este falsă, deci $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)=\infty$ **1p**

Problema 2

$f(x)+2f(3x)+f(9x)=x^2+1+2\left[(3x)^2+1\right]+(9x)^2+1-16x.$ Notând $g(x)=f(x)-x^2-1$, relația

devine: $g(x)+2g(3x)+g(9x)=-16x$ **1p**

$h(x)+h(3x)=-16x$ unde $h(x)=g(x)+g(3x)$ **1p**

$u(x)+u(3x)=0$ (1) unde $u(x)=h(x)+4x$ **1p**

Prin inducție se arată că $u(x)=(-1)^n u\left(\frac{x}{3^n}\right)$, $(\forall)n\in N^*$ **1p**

În (1) facem $x=0\Rightarrow u(0)=0.$ u este funcție continuă, trecând la limită $\Rightarrow u(x)=0$ **1p**

$h(x)=-4x\Rightarrow(g(x)+x)+(g(3x)+3x)=0\Rightarrow v(x)+v(3x)=0$ **1p**

Cu un raționament analog celui de mai sus, avem:

$v(x)=0\Rightarrow g(x)=-x\Rightarrow f(x)=x^2-x+1,$ $(\forall)x\in R.$ **1p**

Problema 3

Din relația $ABC=I_n$. rezultă că cele trei matrice sunt inversabile. **1p**

Suma inverselor este egală cu:

$(I_n+A+AB)^{-1}+(I_n+B+BC)^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A+(I_n+C+CA)^{-1}\cdot(AB)^{-1}\cdot AB$ **1p**

$(I_n+A+AB)^{-1}+(A+AB+ABC)^{-1}\cdot A+\left(AB(I_n+C+CA)\right)^{-1}\cdot AB$ **2p**

$(I_n+A+AB)^{-1}+(A+AB+I_n)^{-1}\cdot A+(AB+I_n+A)^{-1}\cdot AB$ **2p**

$(I_n+A+AB)^{-1}(A+AB+I_n)=I_n$ **1p**

Clasa a XII-a

Problema 1

a) Pentru orice $A(x),A(y)\in G$, avem $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy)\in G$.......................... **1p**

Justificarea faptului că $(G,\cdot)$ este grup abelian...**2p**

b) Fie $f\colon G\to(0,\infty)$, $f(x)=x+1\Rightarrow f$ morfism **1p**

f bijectivă, deci izomorfism.. **1p**

c) $f\left(A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\dots\cdot A\left(\frac{1}{2015}\right)\right)=f(A(x))\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(A\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdot f\left(A\left(\frac{1}{3}\right)\right)\cdot\dots\cdot f\left(A\left(\frac{1}{2015}\right)\right)=x+1\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2015}+1\right) = x+1 \Rightarrow 1008 = x+1 \Rightarrow x = 1007$......................**2p**

Problema 2

Efectuând schimbarea de variabilă $nx = t$, obţinem că

$I = \int_0^1 x^{2015}\cdot\{nx\}dx = \frac{1}{n}\int_0^n \left(\frac{x}{n}\right)^{2015}\cdot\{x\}dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(\frac{x}{n}\right)^{2015}\cdot\{x\}dx$ **1p**

Fie $f:[k,k+1]\to\mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^{2015}$, $g:[k,k+1]\to[0,1),\ g(x)=\{x\}$, f este continuă pe $[k,k+1]$, g este integrabilă şi pozitivă pe $[k,k+1]$ şi din teorema de medie, rezultă că există $c_k\in[k,k+1]$ astfel încât $\int_k^{k+1}\left(\frac{x}{n}\right)^{2015}\cdot\{x\}dx = \left(\frac{c_k}{n}\right)^{2015}\int_k^{k+1}\{x\}dx$. Prin urmare,

$I = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{c_k}{n}\right)^{2015}\int_k^{k+1}\{x\}dx$... **2p**

Fie $\Delta_n = \left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}\right)$ diviziunea echidistantă a intervalului $[0,1] \Rightarrow \|\Delta_n\|\to 0$ şi fie $\xi_k = \left(\frac{c_k}{n}\right)_{0<k<n-1} \Rightarrow \xi_k\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right], 0\le k\le n-1$ este un sistem de puncte intermediare al lui Δ_n.

Atunci $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{c_k}{n}\right)^{2015} = \int_0^1 x^{2015}dx = \frac{1}{2016}$ **2p**

Deoarece funcţia $g(x) = \{x\}$ este periodică, având perioada principală $T = 1$, avem că

$\int_k^{k+1}\{x\}dx = \int_0^1\{x\}dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.. **1p**

Prin urmare, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^{2015}\cdot\{nx\}dx = \frac{1}{4032}$... **1p**

Problema 3

Putem presupune că $F(a)=0$, altfel dacă $F(a)=c\neq 0$ putem considera funcţia $F-c$ care nu alterează mărginirea...**1p**

Dacă F şi f sunt mărginite atunci, evident, $F+f$ este mărginită...**1p**

Reciproc, dacă $F+f$ este mărginită, atunci există $M\ge 0$ astfel încât $|F(x)+f(x)|\le M, \forall x\ge a$ ..**1p**

Înmulţind cu e^x obţinem $\left|\left(e^xF(x)\right)'\right|\le Me^x, \forall x\ge a$. **1p**

Obţinem astfel că funcţia $\varphi(x)=e^x(F(x)+M)$ este crescătoare pe $[a,\infty)$, iar funcţia $\psi(x)=e^x(F(x)-M)$ este descrescătoare pe $[a,\infty)$...**1p**

Din inegalităţile $\varphi(x)\ge\varphi(a), \psi(x)\le\psi(a) \forall x\ge a$ obţinem $|F(x)|\le M\left(1-e^{a-x}\right)\le M$, adică F este mărginită.. **1p**

Cum $F+f$ şi F sunt mărginite, rezultă că şi diferenţa lor, adică f , este mărginită.................**1p**