Clasa a IV-a

Problema 1

Numărul 20 se scrie ca produs de o mie de numere naturale. Aflaţi cea mai mică valoare a sumei celor o mie de numere.

Prof. Nicolaie Tălău, C. N. "Carol I", Craiova

Problema 2

Pe o masă sunt 51 de jetoane inscripţionate cu numerele de la 1 la 51, aşezate cu faţa în jos. Matei ia 25 de jetoane şi îi spune lui Ştefan: "Oricum ai lua 7 jetoane, suma numerelor inscripţionate pe ele va fi un număr impar". Aflaţi suma numerelor de pe jetoanele luate de Matei.

* * *

Problema 3

În fiecare din cele nouă căsuţe ale unui pătrat este înscrisă cifra zero ca în figura următoare. Se alege la întamplare un pătrat al pătratului mare, alcătuit din patru căsuţe alăturate şi se măreşte fiecare număr din pătratul ales cu o unitate.

0	0	0
0	0	0
0	0	0

4	x	9
y	z	u
2	v	w

Se repetă operaţia cu alt pătrat alcătuit din patru căsuţe alăturate sau chiar cu acelaşi pătrat. După 20 de paşi (o alegere este un pas) se obţine pătratul din ultima figură.
Aflaţi numerele x, y, z, u, v, w.

* * *

Clasa a V-a

Problema 1

Determinați numerele naturale prime $p, p \geq 3$, cu proprietatea că numerele naturale $p+2, 2p+1, p^2-6$ sunt simultan prime.

„Cardinal"
Prof. Raluca Ciurcea, C.N. „Carol I", Craiova

Problema 2

Se dau mulțimile $A=\{3^x, 3^{x+y}, 3^{x+2y}\}$ și $B=\{9, 81, 3^{2x-y}\}$, unde x și y sunt numere naturale nenule. Să se afle x și y astfel încât mulțimile să fie egale.

„Țițeica"
Prof. Cristian Schneider, C.N. „Carol I", Craiova

Problema 3

Să se determine numerele naturale n şi $\overline{abcd}$ scrise în baza 10, ştiind că $\overline{abcd} \vdots 19$ şi $n^4 = \overline{acdb}$.

Prof. Monica Stanca, C.N. „Carol I", Craiova

Clasa a VI-a

Problema 1

Să se determine numerele naturale nenule m şi n astfel ca numărul $2^{2n+1} + m!$ să fie pătrat perfect, unde $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot m$.

„Gazeta Matematică"

Problema 2

Să se determine numerele întregi a, b, c ştiind că $a^2 - a + (9 - b^2)^2 + |1 - c^2| \leq 0$.

***

Problema 3

Pe dreapta *d* se consideră punctele *O,A,B* (*A* între *O* şi *B*). Punctele *M* şi *N* sunt de o parte şi de alta a dreptei *d*. Fie [*OE* şi [*AF* bisectoarele unghiurilor *MOA* şi *NAB*. Să se arate că *OE* este perpendiculară pe *AF* dacă şi numai dacă unghiurile *MOA* şi *NAB* sunt suplementare.

***

Clasa a VII-a

Problema 1

Fie x si y numere reale cu $y \neq -1$. Arătaţi că $x^2 - y^2 = 2(x+y)$ dacă şi numai dacă

$$\frac{x-1}{y+1} \in \{-1, 1\}.$$

Gazeta Matematică

Problema 2

Demonstraţi că numărul $a = \sqrt{n^3 + 14n + 14}$ este iraţional oricare ar fi n număr natural.

Prof. Constantin Basarab, C.N. Carol I, Craiova

Problema 3

a) Se dă trapezul ABCD cu AB||CD, m(Â)=30° şi AD=DC=BC. Pe semidreapta [AD se consideră punctul E astfel încât AE=AB. Dacă BE=4cm, calculaţi perimetrul trapezului ABCD.

b) Fie triunghiul isoscel ABC cu AB=AC si m(Â)=30°. Pe latura (AB) se ia punctul D astfel încât $BC = AD\sqrt{2}$. Determinaţi măsura unghiului BDC.

Prof. Constantin Basarab, C.N. Carol I, Craiova

Clasa a VIII-a

Problema 1

a) Arătaţi că

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b), \quad (\forall) a, b \in \mathbb{R}.$$

b) Arătaţi că ecuaţia

$$(3x^2 - x + 1)^3 + (x^2 + x + 3)^3 = 64(x^2 + 1)^3$$

nu are soluţii în mulţimea numerelor reale.

Revista de matematică Ţiţeica

Problema 2

Fie $A = \{[n\sqrt{3}] \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ și $B = \left\{\left[\frac{n}{2}(\sqrt{3} + 3)\right] \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x. Arătaţi că:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}+3} = 1$

b) $A \cap B = \emptyset$.

Prof. Nicolaie Tălău, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3

Pe planul ΔABC se ridică de aceeași parte a planului perpendicularele AA', BB' și CC' astfel încât $[AA'] \equiv [BC]$, $[BB'] \equiv [AC]$ și $[CC'] \equiv [AB]$. Dacă $M \in (CC')$, H este ortocentrul ΔABC, H' este ortocentrul ΔMAB iar O este centrul cercului circumscris $\Delta A'B'C'$, arătaţi că:

a) $HO \perp (A'B'C')$

b) $HH' \perp (MAB)$.

Revista de matematică Ţiţeica

Clasa a IX-a

Problema 1

Calculaţi în funcţie de $n \in N^*$ suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k^2 - k + 1} + \sqrt{k^2 + k + 1}\right]$ unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Prof. Dumitru Acu, G.M. 6/2011

Problema 2

Pentru orice mulţime finită şi nevidă de vectori în plan S, notăm cu $\ell(S)$ lungimea vectorului egal cu suma vectorilor din S. Fiind dată o mulţime finită şi nevidă X de vectori nenuli în plan, spunem că o submulţime nevidă a sa Y este maximală dacă $\ell(Y) \geq \ell(Z)$, pentru orice submulţime nevidă Z a lui X.

a) Construiţi o mulţime X ce conţine 5 vectori nenuli în plan şi are 10 submulţimi maximale.
b) Arătaţi că orice mulţime S ce conţine 1007 vectori nenuli în plan are cel mult 2014 submulţimi maximale.

***

Problema 3

Fie a, b, c trei numere reale pozitive astfel încât $ab + bc + ca = 1$. Să se arate că:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - \frac{3}{2(a+b+c)} \geq \sqrt{3}$$

Prof. Dr. Luminiţa Popescu, C. N. "Carol I", Craiova

Clasa a X-a

Problema 1

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică simultan relațiile $f^2(x) + f(x^3) \leq 2$ și $f^3(x^3) + 3f^2(x^5) \geq 4$.

Arătați că funcția f nu este injectivă.

Prof. Cristian Schneider, C. N. "Carol I", Craiova

Problema 2

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $|a| = |b| = |c| = 1$. Dacă există relația:

$$|a+b|^{2^n} + |b+c|^{2^n} + |c+a|^{2^n} \leq 3 \quad \text{pentru } n \in \mathbb{N}^* \text{ fixat,}$$

demonstrați că a, b, c sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Gazeta Matematică
Prof. Marcel Chiriță, București

Problema 3

Determinați minimul expresiei $\log_{x_1}\left(\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{16}\right) + \log_{x_2}\left(\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{16}\right) + \ldots + \log_{x_n}\left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{16}\right)$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left(\frac{1}{8}, 1\right)$, precum și valorile variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pentru care se realizează minimul.

* * *

Clasa a XI-a

Problema 1

Fie şirul de numere pozitive $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ având limita 1, matricea $A \in M_2(\mathbb{Z})$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin

$$a_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(\det(A^2+\alpha_k I_2)+\det(A^2-\alpha_k I_2)).$$

Să se arate că limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ este pătrat perfect dacă şi numai dacă $\det A = 0$.

„Gazeta Matematică”

Problema 2

Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât

$$n\sqrt[5]{x_n}+n\sqrt[3]{x_n}=2n+1, (\forall)n\geq 1.$$

a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se determine limita sa.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n-1)$.

Prof. Cătălin Spiridon, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3

Să se determine funcţia continuă $f\colon\mathbb{R}\to(0,\infty)$ cu proprietatea că există $a\in(0,\infty)$, pentru care

$$f(x)\cdot\big(1-f(ax)\big)\geq\frac{1}{4},\quad (\forall)x\in\mathbb{R}.$$

***

Clasa a XII-a

Problema 1

Să se calculeze

$$\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx.$$

***

Problema 2

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^2\frac{x^{3n-1}-x^{n-1}}{x^{4n}+1}dx$

Prof. Carmen Liana Georgescu, Revista „Țițeica”

Problema 3

Fie n un număr natural nenul și $(G,\cdot)$ un grup astfel încât $f:G\to G,\ f(x)=x^{n+1}$ este un morfism surjectiv și $g:G\to G, g(x)=x^n$ este o funcție injectivă. Să se demonstreze că grupul G este abelian.

Marian Cucoaneș
Gazeta Matematică