Soluţii şi barem de corectare clasa a IV-a

Problema 1

$20 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{999\ de\ ori} \cdot 20, \quad \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{999\ de\ ori} + 20 = 1019$ ……………..………........……..**1,5p**

$20 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{998\ de\ ori} \cdot 2 \cdot 10, \quad \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{998\ de\ ori} + 2 + 10 = 1010$ ………………........……....**1,5p**

$20 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{998\ de\ ori} \cdot 4 \cdot 5, \quad \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{998\ de\ ori} + 4 + 5 = 1007$ ……………...……........…....**1,5p**

$20 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{997\ de\ ori} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5, \quad \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{997\ de\ ori} + 2 + 2 + 5 = 1006$ ..………………........……..**1,5p**

Concluzia ……………………………………………………………………....…....**1p**

Problema 2

Pe masă au mai rămas cel mult 6 jetoane având numerele inscripţionate pe ele pare. Altfel se pot alege 7 jetoane având numerele inscripţionate pe ele pare, deci şi suma va fi pară, ceea ce nu convine. ....**2 p**

În particular, se obţine că cel puţin 20 dintre cele 26 de jetoane rămase pe masă au inscripţionate pe ele numere impare. Dacă cel puţin un jeton are inscripţionat pe el un număr par, atunci alegând acest jeton şi încă 6 care au inscripţionate pe ele numere impare, obţinem 7 jetoane cu suma pară, ceea ce nu convine. Am arătat că toate cele 26 de jetoane rămase pe masă au inscripţionate pe ele numere impare. ....**3 p**

Matei a luat cele 25 de jetoane inscripţionate cu numere pare, deci suma numerelor este:

$2 + 4 + \cdots + 50 = 2(1 + 2 + \cdots + 25) = 25 \cdot 26 = 650$..**2 p**

Problema 3

Denumim pătratele format din patru căsuţe alăturate, pătrate 2x2.

Căsuţa care îl conţine pe z se află în toate pătratele 2x2, deci $z = 20$. **2p**

Pătratul 2x2 stânga sus este ales de 4 ori, pătratul 2x2 stânga jos este ales de 2 ori, iar pătratul 2x2 dreapta sus este ales de 9 ori, deci pătratul 2x2 dreapta jos este ales de $20 - 4 - 2 - 9 = 5$ ori, deci $w = 5$. **1p**

Căsuţa care îl conţine pe x se găseşte în pătratele 2x2 stânga sus şi dreapta sus,

deci $x = 4 + 9 = 13$. ………………………………...**1p**

În mod analog, deducem că $y = 4 + 2 = 6$, $u = 9 + 5 = 14$, $v = 2 + 5 = 7$. **3p**

Soluţii şi barem de corectare clasa a V-a

Problema 1

Observăm că $p = 3, p = 5$ verifică cerințele problemei și demonstrăm că acestea sunt singurele cu această proprietate…………………………………. …………………………………………**2p**

Pentru $p > 5$ prim, resturile pe care le poate da acesta prin împărțire la 5 sunt 1,2,3,4 ...……..… **1p**

Dacă restul pe care îl dă prin împărțire la 5 este 1 sau 4, atunci $p^2 - 6 > 43$ este multiplu de 5, deci nu este prim **2p**

Dacă restul pe care îl dă prin împărțire la 5 este 2, atunci $2p + 1 > 11$ este multiplu de 5, deci nu este prim.. **1p**

Dacă restul pe care îl dă prin împărțire la 5 este 3, atunci $p + 2 > 7$ este multiplu de 5, deci nu este prim.. **1p**

Problema 2

Deoarece *A*=*B*, produsul elementelor din cele două mulțimi este același.

$3^x \cdot 3^{x+y} \cdot 3^{x+2y} = 3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^{2x-y}$ **1p**

$3x + 3y = 6 + 2x - y$ **1p**

$x + 4y = 6$ **1p**

$y = 0$, rezultă $x = 6$, dar elementele lui A sunt toate egale cu 3^3, imposibil …………………… **1p**

$y = 1$, rezultă $x = 2$, iar $A = \{3^2, 3^3, 3^4\} = B$ **1p**

$y \geq 2$, rezultă $4y \geq 8 > 6$, nu e soluție ………………………………………………….…… **1 p**

Finalizare, singura soluție este $x = 2$ și $y = 1$ ……………………….………………………… **1p**

Problema 3

$5^4 = 625$ și 10^4=10000 nu au patru cifre ……..……………………………………………….... **1p**

Din $n^4 = \overline{acdb}$ rezultă $n \in \{6,7,8,9\}$ …….……………………………………………….... **1p**

Pentru $n = 6$, avem $\overline{acdb} = 1296$, iar $\overline{abcd} = 1629$ nu este divizibil cu 19 …………………… **1p**

Pentru $n = 7$, avem $\overline{acdb} = 2401$, iar $\overline{abcd} = 2140$ nu este divizibil cu 19 ……..............…..… **1p**

Pentru $n = 8$, avem $\overline{acdb} = 4096$, iar $\overline{abcd} = 4609$ nu este divizibil cu 19 …………………… **1p**

Pentru $n = 9$, avem $\overline{acdb} = 6561$, iar $\overline{abcd} = 6156 = 19 \cdot 324$ este divizibil cu 19 ……….…. **1p**

Finalizare, singura soluție este $n = 9$ și $\overline{abcd} = 6156$ …………………………………………. **1p**

Soluţii şi barem de corectare clasa a VI-a

Problema 1

Ultima cifră a numărului 2^{2n+1} poate fi 2 sau 8 .... **1p**
Dacă $m \geq 5$, atunci ultima cifră a numărului $m!$ este 0... **1p**
Deci ultima cifră a numărului $2^{2n+1} + m!$ este 2 sau 8 şi deci, acesta nu poate fi pătrat perfect $\Rightarrow$ $m < 5$... **1p**
Analiza cazurilor $m = 2, m = 3, m = 4$.. **3p**
Soluţie $m = 1, n = 1$.. **1p**

Problema 2

$a^2 - a \geq 0$ pentru orice $a \in \mathbb{Z}$... **1p**
$(9 - b^2)^2 \geq 0$ $și$ $|1 - c^2| \geq 0$ pentru orice $b, c \in \mathbb{Z}$.. **1p**
Conform proprietăţii de antisimetrie, obţinem că $a^2 - a + (9 - b^2)^2 + |1 - c^2| = 0$............ **1p**
De unde rezultă că $a^2 - a = (9 - b^2)^2 = |1 - c^2| = 0$... **1p**
Finalizare: $a \in \{0,1\}, b \in \{-3,3\}$ $și$ $c \in \{-1,1\}$... **3p**

Problema 3

Fie *P* intersecţia dintre [*OE* şi [*AF*.
„⇒" Presupunem că $OE \perp AF$.
Dacă $m(\sphericalangle MOE) = m(\sphericalangle AOE) = x$, atunci $90^\circ - x = m(\sphericalangle PAO) = m(\sphericalangle BAF)$. ……............. **2p**
Deci $m(\sphericalangle BAN) = 180^\circ - 2x \Rightarrow$ unghiurile *MOA* şi *NAB* sunt suplementare………..................... **2p**
„⇐" Fie unghiurile *MOA* şi *NAB* suplementare.
Dacă $m(\sphericalangle MOA) = 2x$ atunci Deci $m(\sphericalangle BAN) = 180^\circ - 2x$. ………………….................... **1p**
$m(\sphericalangle BAF) = 90^\circ - x = m(\sphericalangle PAO)$. Dar $m(\sphericalangle POA) = x$. ……... **1p**
Atunci $m(\sphericalangle PAO) = 90^\circ \Rightarrow OE \perp AF$……... **1p**

Soluţii şi barem de corectare clasa a VII-a

Problema 1

$x^2 - y^2 = 2x + 2y \Leftrightarrow$.. **1p**

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow$.. **1p**

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow$.. **2p**

$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{y+1}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$.. **1,5p**

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{y+1} \in \{-1, 1\}$.. **1,5p**

Problema 2

$n^3 + 14n + 14 = n^3 - n + 15n + 14 = n(n-1)(n+1) + 15n + 12 + 2$ ……………………….....…….. **2p**

$n(n-1)(n+1) \vdots 3$………………………………………………………………….....…….. **2p**

$a = \sqrt{3k+2}$ ……………………………………………………………........………...……... **1p**

$3k + 2$ nu este pătrat perfect………………………………………………..………...……... **2p**

Problema 3

a)

Triunghiul CBE dreptunghic isoscel …..…………………………………...……………….. **1,5p**

$BC = CD = DA = 2\sqrt{2}$ ………………………………….……………...………...……... **1p**

$P_{ABCD} = 2\sqrt{6} + 8\sqrt{2}\,cm$ ………………………………...…………….....……….....……... **1p**

b)

Fie E în interiorul triunghiului ABC astfel încât $ADEC$ să fie trapez isoscel ($DE \parallel AC$)….. **1p**

$BC = EC\sqrt{2}$ şi $m(\sphericalangle ECB) = 45^\circ \Rightarrow$ triunghiul EBC este dreptunghic isoscel....…......….. **1,5p**

$m(\sphericalangle EDC) = 15^\circ$……………………………………...……..………..………….. **0,5p**

$m(\sphericalangle BDC) = 45^\circ$……………………………………...……………...…………….. **0,5p**

Soluţii şi barem de corectare clasa a VIII-a

<u>Problema 1</u>

a).. **2p**

b)Dacă $a = 3x^2 - x + 1$ şi $b = x^2 + x + 3$, ecuaţia devine $ab(a+b) = 0$...**2p**

$a = 0 \Rightarrow 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{2} = 0$(Contradicţie)..**1p**

$b = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = 0$ (Contradicţie)..**1p**

$a + b = 0 \Rightarrow 4\left(x^2 + 1\right) = 0$ (Contradicţie)...**1p**

<u>Problema 2</u>

a).. **2p**

b)Presupunem prin reducere la absurd că $\exists m, n \in N^*$ astfel încât

$\left[n\sqrt{3}\right] = \left[m\frac{\sqrt{3}+3}{2}\right] = k$. Observăm că $n\sqrt{3}, m\frac{\sqrt{3}+3}{2} \in R \setminus Q$...**2p**

$k < n\sqrt{3} < k+1,\ k < m\frac{\sqrt{3}+3}{2} < k+1$.. **1p**

Se înmulţesc cele două relaţii cu $\frac{1}{\sqrt{3}}$ respectiv $\frac{2}{\sqrt{3}+3}$ și se adună. Se obţine $k < m + n < k + 1$

(Contradicţie) **2p**

<u>Problema 3</u>

<u>a)</u> $OA' \equiv OC'$ și $BA' \equiv BC' \Rightarrow BO$ este inclusă în planul mediator al segmentului $[A'C']$. Deducem că $BO \perp A'C'$..**1p**

$BH \perp A'C'$.. **1p**

$A'C' \perp HO$ **0.5p**

Analog $A'B' \perp HO$, deci $HO \perp \left(A'B'C'\right)$.. **1p**

<u>b)</u>Fie D piciorul perpendicularei din C pe AB. Atunci $MD \perp AB$...**0.5p**

$DA \cdot DB = DH \cdot DC$ şi $DA \cdot DB = DH' \cdot DM$ rezultă $\Delta DH'H \approx \Delta DCM$.................................. **1.5p**

$m(\sphericalangle DH'H) = m(\sphericalangle DCM) \Rightarrow MH' \perp MD$...**0.5p**

Dar $HH' \perp AB \Rightarrow HH' \perp (MAB)$...**1p**

Soluţii şi barem de corectare clasa a IX-a

Problema 1

$2k \le \sqrt{k^2+k+1}+\sqrt{k^2-k+1}, \quad k \ge 1$ **3p**

$\sqrt{k^2+k+1}+\sqrt{k^2-k+1} < 2k+1, \ k \ge 1$ **3p**

$S_n = n(n+1)$ ……………………............…………..……………………………………… **1p**

Problema 2

a) Fie pentagonal convex regulat $ABCDE$ şi considerăm mulţimea de vectori $X = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EA}\}$.

Se observă uşor că submulţimile $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\}$ şi $\{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EA}\}$ sunt maximale, ca şi perechile de submulţimi obţinute prin rotaţia circulară a vârfurilor A, B, C, D, E. În total găsim 10 submulţimi maximale. …………………………………………………………….………………….……....**2p**

b) Desenăm vectorii din mulţimea S cu originea în punctul comun O. Fie Y o submulţime maximală a lui S şi notăm cu $\vec{u}$ suma tuturor vectorilor din Y(să notăm că $\vec{u}$ este nenul). Dacă d este dreapta prin O perpendiculară pe $\vec{u}$, atunci Y conţine exact vectorii care se află de aceeaşi parte a lui d ca şi $\vec{u}$. ...…………………...………………...………….………………………….……**1p**

Într-adevăr, dacă $v \notin Y$ se află de aceeaşi parte a lui d ca şi $\vec{u}$, atunci $|\vec{u}+\vec{v}| > |\overrightarrow{u}|$, ceea ce contrazice maximalitatea lui Y. ……………………...……………….………………….…...**1p**

Dacă $v \in Y$ se află de cealaltă parte a lui d, atunci $|\vec{u}-\vec{v}| > |\overrightarrow{u}|$, ceea ce contrazice maximalitatea lui Y. …………………………………………………….…………………………….……...**1p**

Obţinem că orice submulţime maximală este determinată de o dreaptă d, ca fiind mulţimea de vectori ce se află de o parte a acesteia. Pe de altă parte, orice dreaptă ce trece prin O determină exact două submulţimi (de o parte şi de alta a ei). Rotind o dreaptă în jurul lui O, obţinem exact 1007 perechi de astfel de submulţimi (perechile se schimbă atunci când dreapta pe care o rotim trece prin dreapta suport a câte unui vector), cu alte cuvinte avem cel mult 2014 submulţimi maximale. ……………………………………….……………...…………………………..…….**2p**

Problema 3

Să observăm că cel mult unul din numerele a, b, c poate fi egal cu zero, altfel condiţia $ab+bc+ca=1$ nu este satisfăcută. În particular, deducem că numitorii fracţiilor din inegalitatea ce trebuie demonstrată sunt nenuli. ………..……………….………………………………….………**0,5 p**

Prin înmulţire cu $a+b+c>0$ inegalitatea devine echivalentă cu:

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}-\frac{3}{2} \ge \sqrt{3}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+3-\frac{3}{2} \ge \sqrt{3}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a} \ge \sqrt{3}(a+b+c)-\frac{3}{2}$$ … … … … … … … … . … … … … … … … … … … … … . **2 p**

Pentru a demonstra inegalitatea de mai sus aplicăm inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz pentru numerele $c(a+b), a(b+c), b(c+a)$ şi $\frac{c}{a+b}, \frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}$ şi obţinem:

$[c(a+b)+a(b+c)+b(c+a)](\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}) \ge (c+a+b)^2$……………………..….**1.5 p**

$$\Rightarrow \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a} \ge \frac{1}{2}(a+b+c)^2$$

……………………………………………………….. ……………………..……..……**1 p**

Din $(a+b+c-\sqrt{3})^2 \ge 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)^2 \ge \sqrt{3}(a+b+c)-\frac{3}{2}$ …………………………**1 p**

Finalizare ………………………………………………………….……………………..…….**1 p**

Soluţii şi barem de corectare clasa a X-a

Problema 1

Rezolvăm sistemul de ecuații $x^3 = x,\ x^5 = x^3 \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$ ....**1 p**

Notăm $f(-1) = a \Rightarrow a^2 + a - 2 \le 0$ (1), $a^3 + 3a^2 - 4 \ge 0$ (2) ....**1 p**

(1) $\Leftrightarrow a \in [-2, 1]$ ....**1 p**

(2) $\Leftrightarrow (a-1)(a+2)^2 \ge 0$ deci $a \in \{-2\} \cup [1, +\infty)$ ....**1 p**

Intersectăm mulțimile $\Rightarrow a \in \{-2, 1\}$ ....**1 p**

Analog $b, c \in \{-2, 1\}$ **1p**

Finalizare **1p**

Problema 2

Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski rezultă $|a+b|^{2^{n-1}} + |b+c|^{2^{n-1}} + |c+a|^{2^{n-1}} \le 3$ ....**2 p**

Continuând raționamentul rezultă $|a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2 \le 3$ ....**1 p**

Notând $S = a + b + c$ avem $3 \ge \sum |S-a|^2 = \sum (S-a)(\bar{S}-\bar{a}) \Rightarrow S = 0$ ....**2 p**

Concluzia. ....**2 p**

Problema 3

$\left(x_k - \frac{1}{4}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x_k^2 \ge \frac{1}{2} \cdot x_k - \frac{1}{16},\ (\forall) k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ....**2 p**

$x_k \in (0, 1) \Rightarrow \log_{x_k} x_{k+1}^2 \le \log_{x_k}\left(\frac{1}{2} \cdot x_{k+1} - \frac{1}{16}\right),\ (\forall) k \in \{1, 2, \dots, n\}$, unde $x_{n+1} = x_1$ ....**1 p**

Însumând $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \log_{x_k}\left(\frac{1}{2} x_{k+1} - \frac{1}{16}\right) \ge 2\sum_{k=1}^{n} \log_{x_k} x_{k+1}$ ....**1 p**

Folosind inegalitatea mediilor $\sum_{k=1}^{n} \log_{x_k} x_{k+1} \ge n$ ....**1 p**

Concluzie: $\sum_{k=1}^{n} \log_{x_k}\left(\frac{1}{2} \cdot x_{k+1} - \frac{1}{16}\right) \ge 2n$ ....**1 p**

Minimul se realizează pentru $x_k - \frac{1}{4} = 0,\ (\forall) k \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow (x_1, , x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}\right)$ .....**1 p**

Soluţii şi barem de corectare clasa a XI-a

Problema 1

Fie $f(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - Tr(A)x + \det(A)$ polinomul caracteristic al matricei A. Avem:

$\det(A^2 + \alpha_k I_2) = \det(A + i\sqrt{\alpha_k}I_2) \cdot \det(A - i\sqrt{\alpha_k}I_2) = f(i\sqrt{\alpha_k})f(-i\sqrt{\alpha_k}) =$

$= (\det A - \alpha_k)^2 + \alpha_k(Tr(A))^2$.. **1p**

$\det(A^2 - \alpha_k I_2) = \det(A + \sqrt{\alpha_k}I_2) \cdot \det(A - \sqrt{\alpha_k}I_2) = f(\sqrt{\alpha_k})f(-\sqrt{\alpha_k}) =$

$= (\det A - \alpha_k)^2 - \alpha_k(Tr(A))^2$.. **1p**

$\det(A^2 + \alpha_k I_2) + \det(A^2 - \alpha_k I_2) = 2((\det A)^2 + \alpha_k^2)$ **1p**

Obţinem că $a_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(2((\det A)^2 + \alpha_k^2)\right) = (\det A)^2 + \dfrac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2}{n}$.......................... **1p**

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (\det A)^2 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2}{n} = (\det A)^2 + 1$.. **1p**

Dacă $\det A = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$ şi deci, pătrat perfect **1p**

Dacă limita şirului este pătrat perfect, rezultă că există $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât $\lim_{n\to\infty} a_n = k^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\det A)^2 + 1 = k^2 \Rightarrow (k + \det A)(k - \det A) = 1 \Rightarrow k + \det A = k - \det A = 1 \; sau \; k + \det A = k - \det A = -1 \;\Rightarrow \det A = 0$ **1p**

Problema 2 Relaţia dată este echivalentă cu $\sqrt[5]{x_n} + \sqrt[3]{x_n} = 2 + \frac{1}{n}, (\forall) n \geq 1$ ....(1).......**1p**

Avem: $\sqrt[5]{x_n} + \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[5]{x_n}\left(1 + \sqrt[15]{x_n^2}\right) = 2 + \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \sqrt[5]{x_n} > 0 \Rightarrow x_n > 0$ **1p**

Scăzând relaţiile $\sqrt[5]{x_{n+1}} + \sqrt[3]{x_{n+1}} = 2 + \frac{1}{n+1}$ şi $\sqrt[5]{x_n} + \sqrt[3]{x_n} = 2 + \frac{1}{n}$ obţinem:

$\sqrt[5]{x_{n+1}} - \sqrt[5]{x_n} + \sqrt[3]{x_{n+1}} - \sqrt[3]{x_n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \Rightarrow$

$(x_{n+1} - x_n)\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x_{n+1}^4} + \sqrt[5]{x_{n+1}^3 \cdot x_n} + \cdots + \sqrt[5]{x_n^4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x_{n+1}^2} + \sqrt[3]{x_{n+1} \cdot x_n} + \sqrt[3]{x_n^2}}\right) = \dfrac{-1}{n(n+1)} \Rightarrow x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow$ şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi mărginit inferior, deci este convergent **1p**

$(x_n)_{n\geq 1}$ convergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ şi prin trecere la limită în relaţia (1) $\Rightarrow \sqrt[5]{l} + \sqrt[3]{l} = 2$ care are soluţia unică $l = 1$.. **1p**

a) Din relaţia (1)$\Rightarrow \sqrt[5]{x_n} - 1 + \sqrt[3]{x_n} - 1 = \frac{1}{n}$ **1p**

$\Rightarrow (x_n - 1)\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x_n^4} + \sqrt[5]{x_{n+1}^3} + \cdots + 1} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x_n^2} + \sqrt[3]{x_n} + 1}\right) = \dfrac{1}{n} \Rightarrow n(x_n - 1) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt[5]{x_n^4} + \sqrt[5]{x_{n+1}^3} + \cdots + 1} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x_n^2} + \sqrt[3]{x_n} + 1}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1) = \dfrac{15}{8}$ **2p**

Problema 3 Avem că $f(x) \in (0,1)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.. **1p**

Folosind inegalitatea mediilor, obţinem: $\frac{f(x) + 1 - f(ax)}{2} \geq \sqrt{f(x)[1 - f(ax)]} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(ax) \leq f(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$ (1) **1p**

Prin inducţie $\Rightarrow 0 < f(a^{n+1}x) \leq f(a^n x) \leq f(x) \leq f\left(\frac{x}{a^n}\right) \leq f\left(\frac{x}{a^{n+1}}\right) < 1$ **2p**

Considerăm şirurile definite prin $x_n = f(a^n x)$ şi $y_n = f\left(\frac{x}{a^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător, iar $(y_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător. Deci, cele două şiruri sunt convergente....... **1p**

Din relaţia din enunţ$\Rightarrow x_n(1 - x_{n+1}) \geq \frac{1}{4}$ şi $y_{n+1}(1 - y_n) \geq \frac{1}{4}$ de unde, prin trecere la limită $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{1}{2}$ **1p**

Deoarece $x_n \leq f(x) \leq y_n, (\forall) \, n \geq 1$, se obţine că $f(x) = \frac{1}{2}, \; x \in \mathbb{R}$ **1p**

Soluţii şi barem de corectare clasa a XII-a

Problema 1

$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tg(t))dt \overset{not}{=} i$ **2p**

$i = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+tg\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right)\cdot(-1)dy$ **2p**

$tg\left(\frac{\pi}{4}-y\right) = \frac{1-tg(y)}{1+tg(y)}$ **1p**

$i = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-tg(y)}{1+tg(y)}\right)dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+tg(y)}\right)dy = \frac{\pi}{4}\ln 2 - i$ **1p**

Finalizare $i = \frac{\pi}{8}\ln 2$ **1p**

Problema 2

$\lim_{n\to\infty}\int_1^2 \frac{x^{3n-1}-x^{n-1}}{x^{4n}+1}dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^2 \frac{x^{n-1}-x^{-n-1}}{x^{2n}+x^{-2n}}dx$ **2p**

$\lim_{n\to\infty}\int_1^2 \frac{x^{n-1}-x^{-n-1}}{x^{2n}+x^{-2n}}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^2 \frac{\left(x^n+x^{-n}\right)'}{\left(x^n+x^{-n}\right)^2-2}dx$ **1p**

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^2 \frac{\left(x^n+x^{-n}\right)'}{\left(x^n+x^{-n}\right)^2-2}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^n+x^{-n}-\sqrt{2}}{x^n+x^{-n}+\sqrt{2}}\right)\Bigg|_1^2$ **1p**

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^n+x^{-n}-\sqrt{2}}{x^n+x^{-n}+\sqrt{2}}\right)\Bigg|_1^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2^n+2^{-n}-\sqrt{2}}{2^n+2^{-n}+\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$ **1p**

Finalizare $\lim_{n\to\infty}\int_1^2 \frac{x^{3n-1}-x^{n-1}}{x^{4n}+1}dx = 0$ **2p**

Problema 3

$f: G\to G,\ f(x)=x^{n+1}$ este morfism $\Rightarrow x^{n+1}y^{n+1}=(xy)^{n+1} \Rightarrow x^n y^n = (yx)^n, \forall x,y\in G\ (1)$ **1p**

Atunci $x^n y^{n+1}x = (yx)^{n+1} = y^{n+1}x^{n+1} \Rightarrow x^n y^{n+1} = y^{n+1}x^n, \forall x,y\in G$ **2p**

$f: G\to G,\ f(x)=x^{n+1}$ surjectivă $\Rightarrow x^n z = z x^n, \forall x,z\in G\ (2)$ **1p**

$\forall a,b\in G, \exists x,y\in G\ a.i.\ a=x^{n+1}, b=y^{n+1}$ **1p**

Atunci $(ab)^n = \left(x^{n+1}y^{n+1}\right)^n \overset{(1)}{=} y^{n(n+1)}x^{n(n+1)} \overset{(2)}{=} x^{n(n+1)}y^{n(n+1)} \overset{(1)}{=} \left(y^{n+1}x^{n+1}\right)^n = (ba)^n$ **1p**

$g: G\to G, g(x)=x^n$ injectivă $\Rightarrow ab=ba, \forall a,b\in G$ **1p**