190 DE ANI

ISTORIE, EDUCATIE, PERFORMANTA

Concursul Interjudeţean de Matematică

„Ion Ciolac”

Ediţia a XVI-a, 3 aprilie 2016

Clasa a IX-a

Problema 1

Fie $[AB]$ și $[CD]$ două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru O, $\{S\}=AB\cap CD$ și M, N mijloacele coardelor $[AB]$ și respectiv $[CD]$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.

b) Să se arate că dacă $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=3\cdot\overrightarrow{MN}$, atunci $ACBD$ este pătrat.

* * *

Problema 2

Arătați că

$$\frac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{ab}+\frac{\sqrt{b^2+bc+c^2}}{bc}+\frac{\sqrt{c^2+ca+a^2}}{ca}\geq\frac{9\sqrt{3}}{a+b+c},$$

pentru oricare trei numere reale strict pozitive a, b, c.

Prof. Cristian Schneider, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3

Să se determine funcțiile $f\colon Z\to Z$ cu proprietatea că: $7f(x)-3f\big(f(x)\big)=2x,\ (\forall)x\in Z$.

Problemă Gazeta Matematică

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează de la 0 puncte la 7 puncte.*

Succes!

Concursul Interjudeţean de Matematică

„Ion Ciolac”

Ediţia a XVI-a, 3 aprilie 2016

Soluţii şi barem de corectare clasa a IX-a

<u>Problema 1</u>

a) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}=2\overrightarrow{SM},\ \overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SN}$ **2p**

$SMON$ dreptunghi $\Rightarrow \overrightarrow{SM}+\overrightarrow{SN}=\overrightarrow{SO}$ **1p**

Concluzie: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$ **1p**

b) Adunând $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$ şi $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN} \Rightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$ **1p**

$3\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MN} \Rightarrow M=N$ **1p**

$ACBD$ este paralelogram înscris în cerc, cu diagonale perpendiculare, deci pătrat.......... **1p**

<u>Problema 2</u>

$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{ab} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ și analoagele.......... **3p**

Însumând relațiile de mai sus obținem:

$\dfrac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{ab}+\dfrac{\sqrt{b^2+bc+c^2}}{bc}+\dfrac{\sqrt{c^2+ca+a^2}}{ca} \geq \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)(1)$ **1p**

Din inegalitatea între media aritmetică și media armonică obținem

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}(2)$.......... **2p**

Din relațiile (1) și (2) rezultă cerința problemei **1p**

<u>Problema 3</u>

Fie $g(x)=f(x)-2x,\ (\forall)x \in Z$ **1p**

$f(x)-2x=3\left(f\left(f(x)\right)-2f(x)\right) \Leftrightarrow g(x)=3g\left(f(x)\right)$ **1p**

$g(x)=3g\left(f(x)\right)=3^2g\left(f\left(f(x)\right)\right)=\cdots=3^n g\left(f_n(x)\right), f_n(x)=\left(\underbrace{f\circ f\circ \dots\circ f}_{de\ n\ ori}\right)(x), n \in N$.......... **2p**

$g(x) \in Z,\ (\forall)x \in Z \Longrightarrow g(x) \,\vdots\, 3^n, (\forall)n \in N, (\forall)x \in Z$.......... **2p**

$g(x)=0, (\forall)x \in Z \Longrightarrow f(x)=2x, (\forall)x \in Z$.......... **1p**