ISTORIE, EDUCATIE, PERFORMANTA

Concursul Interjudeţean de Matematică

„Ion Ciolac”

Ediţia a XVI-a, 3 aprilie 2016

Clasa a VIII-a

Problema 1

Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $\sqrt{x^2+y^2}+x=12+y$.

Revista Ţiţeica

Problema 2

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură a se consideră punctul $S \in [CC']$. Notăm $\{O\}=BD\cap AC$ şi $\{M\}=SO\cap A'C'$. Dacă planele $(A'BD)$ şi (MBD) formează un unghi α şi $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{129}}$, stabiliţi poziţia punctului S pe CC'.

„Gazeta Matematică”
Prof. M Berindeanu, București

Problema 3

Arătaţi că dacă $a,b,c\in\left(\frac{1}{3},\infty\right)$ atunci

$$\frac{a^2+b^2}{3b-1}+\frac{b^2+3c^2}{3c-1}+\frac{c^2+5a^2}{3a-1}\geq\frac{16}{3}$$

Prof. Luminița Popescu , C.N. „Carol I”, Craiova

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează de la 0 puncte la 7 puncte.*

Succes!

Soluţii şi barem de corectare clasa a VIII-a

Problema 1

$\sqrt{x^2+y^2}+x=12+y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=12+y-x,\ 12+y-x\geq 0$ $(\mathbf{1})$. ……………………………**1p**
Ridicând la pătrat şi reducând termenii asemenea se obţine
$xy+12x-12y=72 \ \Leftrightarrow (12-x)(y+12)=72\ \ (\mathbf{2})$ …. ………………………………………… **3p**
Din **(1)** avem $(12+y)+(12-x)\geq 12$, iar din relaţia **(2)** rezultă că $(12+y)\geq 0,\ (12-x)\geq 0$…..**1p**
Finalizare: $(x,y)\in\{(11,60),(10,24),(9,12),(8,6),(6,0),(4,-3),(3,-4),(0,-6),(-6,-8),(-12,-9),$ $(-24,-10),(-60,-11)\}$…………………………………………………………………………………**2p**

Problema 2

Fie $MN\perp AC, N\in AC$. În planul $(AA'C)$ avem $MN\parallel CC'$ de unde $MN\perp(ABC)$. Din $BD\perp(ACC')$ avem că $MO\perp BD$ şi $A'O\perp BD$. Deoarece $(MBD)\cap(A'BD)=BD$ obţinem că $m\left(\sphericalangle\left((MBD),(A'BD)\right)\right)$ este egală cu $m\left(\sphericalangle(MOA')\right)$ sau a suplementului acestuia dacă $m\left(\sphericalangle(MOA')\right)>90°$……………………………… **2p**
Fie $\{O'\}=B'D'\cap A'C'$. Atunci $OO'\perp A'C'$ şi, dacă latura cubului este a, atunci $A'C'=2CO=a\sqrt{2}$, $MN=OO'=a$, $A'O=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Deoarece $MC'\parallel CO$ avem $\Delta MC'S\sim\Delta OCS$, de unde $\frac{C'S}{CS}=\frac{C'M}{CO}=k$, iar $C'M=\frac{a\sqrt{2}}{2}k$ ……………………………………………………………………………… **1p**
Mai mult, $A'M=\frac{a\sqrt{2}}{2}(k+2)$ şi $MO=\sqrt{MN^2+ON^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{k^2+2k+3}$……………………………**1p**
Dacă $A'E\perp MO, E\in MO$, avem $EO'=A'O\cos\alpha$, iar $A'E=\sqrt{A'O^2-A'O^2cos^2\alpha}=\frac{8a\sqrt{43}}{43}$. ……………… **1p**
Din relaţiile anterioare şi $A_{MOA'}=\frac{OO'\cdot MA'}{2}=\frac{OM\cdot EA'}{2}$ obţinem $21k^2-44k+20=0$ de unde $\frac{C'S}{CS}=k\in\left\{\frac{2}{3},\frac{10}{7}\right\}$ şi $\frac{C'S}{CC'}=k\in\left\{\frac{2}{5},\frac{10}{17}\right\}$. …………………………………………………………………… **2p**

Problema 3

Varianta 1
Observăm că $\frac{a^2+b^2}{3b-1}+\frac{b^2+3c^2}{3c-1}+\frac{c^2+5a^2}{3a-1}=\frac{a^2}{3b-1}+\frac{b^2}{3c-1}+\frac{c^2}{3a-1}+\frac{b^2}{3b-1}+3\frac{c^2}{3c-1}+5\frac{a^2}{3a-1}$……………………… **1p**
Aplicăm CBS şi obţinem $(3b-1+3c-1+3a-1)\left(\frac{a^2}{3b-1}+\frac{b^2}{3c-1}+\frac{c^2}{3a-1}\right)\geq(a+b+c)^2$, de unde $\frac{a^2}{3b-1}+\frac{b^2}{3c-1}+\frac{c^2}{3a-1}\geq\frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c-1)}\geq\frac{4}{3}$ (1), deoarece ultima inegalitate este echivalentă cu $(a+b+c-2)^2\geq 0$. …………………………………………………………………………………… **3p**
Din $(3x-2)^2\geq 0$, deducem că $\frac{x^2}{3x-1}\geq\frac{4}{9}, \forall x\in\left(\frac{1}{3},\infty\right)$. Utilizând această inegalitate pentru a,b,c găsim că: $\frac{b^2}{3b-1}+3\frac{c^2}{3c-1}+5\frac{a^2}{3a-1}\geq\frac{4}{9}+3\cdot\frac{4}{9}+5\cdot\frac{4}{9}=4$ (2) ……………………………………… **2p**
Finalizare ……………………………………………………………………………………………**1p**

Varianta a II-a

Notăm $3a-1=x>0, 3b-1=y>0, 3c-1=z>0$. Inegalitatea de demonstrat devine
$\frac{(x+1)^2+(y+1)^2}{y}+\frac{(y+1)^2+3(z+1)^2}{z}+\frac{(z+1)^2+5(x+1)^2}{x}\geq 48$ **1p**
$(x+1)^2\geq 4x$ și analoagele conduc la
$\frac{(x+1)^2+(y+1)^2}{y}+\frac{(y+1)^2+3(z+1)^2}{z}+\frac{(z+1)^2+5(x+1)^2}{x}\geq 4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+36$ **1p**
Aplicăm CBS şi obţinem $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}$...**2p**
Din $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0\Rightarrow(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$..............................**2p**
Din ultimele trei inegalități se obține relația de demonstrat **1p**