



ISTORIE, EDUCATIE, PERFORMANTA

Concursul Interjudețean de Matematică

„Ion Ciolac”

Ediția a XVI-a, 3 aprilie 2016

Clasa a VI-a

Problema 1

Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$(x+1)(y+1) = xyz$$

Gazeta Matematică

Problema 2

Notăm cu $d(n)$ numărul divizorilor lui n , $n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculați $d(2016)$

b) Arătați că $d(1) + d(2) + d(3) + \dots + d(2016)$ este număr par.

Problema 3

Fie triunghiul isoscel ABC de bază $[BC]$. Perpendiculara în A pe AB se intersectează perpendiculara în C pe BC în D , iar perpendiculara în A pe AC intersectează perpendiculara în B pe BC în E . Dacă $DM \perp AC$, $M \in AC$, $EN \perp AB$, $N \in AB$ și $DM \cap EN = \{P\}$, demonstrați că:

a) $\triangle PBC$ este isoscel;

b) $AP \perp BC$.

Prof. Constantin Basarab, C.N., Carol I” Craiova

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează de la 0 puncte la 7 puncte.

Succes!

Problema 1

Observăm că x, y și z sunt nenule0,5 p

Se împarte egalitatea prin zy și se obține $\left. \begin{array}{l} \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = z \\ 1 + \frac{1}{x} \leq 2; 1 + \frac{1}{y} \leq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow z \leq 4$1,5p

Dacă $z = 4 \Rightarrow x = y = 1$0,5p

Dacă $z = 3 \Rightarrow xy + x + y + 1 = 3xy \Rightarrow y = \frac{x+1}{2x-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow (x, y) \in \{(1; 2); (2; 1)\}$1,5p

Dacă $z = 2 \Rightarrow (x, y) \in \{(2; 3); (3; 2)\}$1p

Dacă $z = 1$ ecuația nu are soluții.....1p

Deci $(x, y, z) \in \{(1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 1, 3), (2, 3, 2), (3, 2, 2)\}$1p

Problema 2

a) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \Rightarrow d(2016) = (5 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 36$1p

b) Orice număr natural pătrat perfect are un număr impar de divizori și orice număr natural care nu este pătrat perfect are un număr par de divizori..... 1,5p

De la 1 la 2016 sunt 44 de pătrate perfecte..... 1,5p

Suma numerelor divizorilor celor 44 de pătrate perfecte este număr par.....1,5p

Suma numerelor divizorilor celorlalte 1972 numere este tot număr par..... 1,5p

Problema 3

a) $\triangle ADC \equiv \triangle AEB(U.L.U.) \Rightarrow AE = AD$ și $BE = DC$1,5p

$\triangle ANE \equiv \triangle AMD(I.U.) \Rightarrow AN = AM$ 1p

$\triangle ANP \equiv \triangle AMP(I.C.) \Rightarrow \widehat{NAP} \equiv \widehat{MAP}$ 1,5p

$\triangle APB \equiv \triangle APC(L.U.L.) \Rightarrow BP = CP \Rightarrow \triangle PBC - isoscel$1,5p

b) $PB = PC$ și $AB = AC \Rightarrow AP$ este mediatoarea lui $[BC] \Rightarrow AP \perp BC$ 1,5p