190 DE ANI
ISTORIE, EDUCAȚIE, PERFORMANȚĂ

**Concursul Interjudeţean de Matematică**

# „Ion Ciolac”

**Ediţia a XVI-a, 3 aprilie 2016**

## Clasa a XI-a

**Problema 1**

Fie $A$ şi $B$ două matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ asemenea în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, adică există o matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversabilă astfel încât $AP = PB$. Arătaţi că $A$ şi $B$ sunt asemenea în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

*Prof. Dorin Popovici*
*Revista Ţiţeica*

**Problema 2**

Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + x - n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $f$ este funcţie inversabilă.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)}{\ln x}$.

c) Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n$ este unica soluţie reală a ecuaţiei $f\big(f(x)\big) = x$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

*******

**Problema 3**

Să se determine funcţiile $f: [0,3] \to (0,1]$ care verifică condiţiile:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x^2} \in \mathbb{R}$.

ii) $f(3x) + 3f(x) = 4f^3(x), (\forall)x \in [0,1]$.

*Prof. Cătălin Spiridon, C.N. „Carol I”, Craiova*
*Prof. Carmen Georgescu, C.N. „Carol I”, Craiova*

***Notă:*** *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează de la 0 puncte la 7 puncte.*

***Succes!***

190 DE ANI

ISTORIE, EDUCATIE, PERFORMANTA

**Concursul Interjudeţean de Matematică**

# „Ion Ciolac”

**Ediţia a XVI-a, 3 aprilie 2016**

## Soluţii şi barem de corectare clasa a XI-a

**<u>Problema 1</u>**

Fie $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversabilă astfel încât $AP = PB \Rightarrow P = \left(z_{kj}\right)_{1\le k,j\le n} = \left(u_{kj} + iv_{kj}\right)_{1\le k,j\le n} =$
$= U + iV$ unde $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$..........................................................................................**1p**

Din $AP = PB \Rightarrow AU + iAV = UB + iVB \Rightarrow AU = UB$ şi $AV = VB$..........................................**1p**

Fie $f(x) = \det(U + xV) \in \mathbb{R}[X]$. Deoarece $\det P \neq 0 \Rightarrow f(i) \neq 0 \Rightarrow$ f este nenul..........................**2p**

Deci, $\exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) \neq 0 \Rightarrow \det(U + xV) \neq 0 \Rightarrow U + xV$ este matrice inversabilă din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ............**2p**

$A(U + xV) = AU + xAV = UB + xVB = (U + xV)B \Rightarrow A$ şi $B$ sunt asemenea în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.........................**1p**

**<u>Problema 2</u>**

**a)** $f$ este funcţie strict crescătoare fiind suma a două funcţii strict crescătoare$\Rightarrow f$ injectivă...........................**1p**
$f$ continuă$\Rightarrow f$ are P.D. şi cum $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ şi $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Rightarrow f$ surjectivă ..................**1p**

**b)** Fie $f^{-1}(x) = y \Rightarrow x = f(y)$ şi $y \to \infty$ când $x \to \infty$. Înlocuind, obţinem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\ln x} = \lim_{y\to\infty}\frac{y}{\ln(f(y))} = \lim_{y\to\infty}\frac{y}{\ln(e^y + y - n)} = \lim_{y\to\infty}\frac{y}{\mathrm{y} + \ln\left(1 + \frac{y}{e^y} - \frac{n}{e^y}\right)} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{2p}$$

**c)** Avem: $f\left(f(x)\right) = x \Leftrightarrow f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$ deoarece graficele funcţiilor $f$ şi $f^{-1}$ sunt simetrice faţă de prima bisectoare..........................................................................................**1p**

Deci, $f(x_n) = x_n \Leftrightarrow e^{x_n} + x_n - n = x_n \Leftrightarrow e^{x_n} = n \Rightarrow x_n = \ln n$..................................................**1p**

Obţinem că $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} 1$..........................................................................**1p**

**<u>Problema 3</u>**

Pentru $x = 0 \Rightarrow f(0) + 3f(0) = 4f^3(0) \Rightarrow f(0) \in \{-1,0,1\} \Rightarrow f(0) = 1 \in (0,1]$..............................**0,5p**

Avem $\lim_{x\to0}\left(f(x) - f(0)\right) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2}\cdot x^2 = 0 \Rightarrow f$ continuă în $x_0 = 0$.......................................**0,5p**

Fie $g: [0,3] \to \left[0,\frac{\pi}{2}\right), g(x) = \arccos f(x), (\forall)\, x \in [0,3] \Rightarrow g$ continuă în $x_0 = 0$ şi
$f(x) = \cos g(x), (\forall) x \in [0,3]$.

Înlocuind în relaţia *ii)*, obţinem:$\cos g(3x) = 4\cos g(x) - 3cos^3 g(x) = \cos 3g(x)$................................**1p**

Deoarece $g(x) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 3g(x) \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right)$. Dar $\cos g(3x) \geq 0$, deci şi $\cos 3g(x) \geq 0$ prin urmare, ecuaţia $\cos g(3x) = \cos 3g(x)$ implică $g(3x) = 3g(x), (\forall) x \in [0,1] \Rightarrow g(x) = 3g\left(\frac{x}{3}\right), (\forall) x \in [0,3]$ ..........**1p**

Prin metoda inducţiei matematice rezultă că $g(x) = 3^n g\left(\frac{x}{3^n}\right), (\forall) x \in [0,3]$ şi $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, de unde rezultă că $\frac{g(x)}{x} = \frac{g\left(\frac{x}{3^n}\right)}{\frac{x}{3^n}}$ $(\forall) x \in (0,3]$ şi $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$..........................................................................................**1p**

Deoarece $g(0) = \arccos f(0) = \arccos 1 = 0$ , avem:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\cos g(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{g(x)}{2}}{\left(\frac{g(x)}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{g(x)}{2}\right)^2}{x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 \in \mathbb{R}\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{1p}$$

Fie $\lim_{x\to0}\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 = a \in [0,\infty)$. Obţinem: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{g\left(\frac{x}{3^n}\right)}{\frac{x}{3^n}}\right)^2 = a, (\forall) x \in (0,3]$ *şi*
$g(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{g(x)}{x} = \sqrt{a} \Rightarrow g(x) = \sqrt{a}x, (\forall) x \in (0,3]$..........................................................................**1p**

Deoarece $0 \leq g(x) < \frac{\pi}{2}, (\forall) x \in [0,3] \Rightarrow 0 \leq \sqrt{a}x < \frac{\pi}{2}, (\forall) x \in [0,3] \Rightarrow 0 \leq \sqrt{a} < \frac{\pi}{6}$ şi deci,
funcţiile care verifică ipotezele sunt $f: [0,3] \to (0,1], f(x) = \cos mx$, unde $m \in [0,\frac{\pi}{6})$..................................**1p**