ISTORIE, EDUCATIE, PERFORMANTA

Concursul Interjudeţean de Matematică

„Ion Ciolac”

Ediţia a XVI-a, 3 aprilie 2016

Clasa a X-a

Problema 1

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale astfel încât $x_1 = 3, x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}$, pentru oricare număr natural nenul n.

a) Demonstraţi că $x_n \in [3,4), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Folosind eventual proprietatea precedentă demonstraţi că

$$\log_{x_1}(7x_2 - 12) + \log_{x_2}(7x_3 - 12) + \cdots + \log_{x_n}(7x_1 - 12) \geq 2n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

***

Problema 2

Rezolvați ecuația $tg^2x \cdot \ln(tgx) = (tgx - 1) \cdot \ln(cos^2x)$.

Prof. Raluca Ciurcea, C. N. „Carol I”, Craiova

Problema 3

Fie numerele complexe nenule z_1, z_2, z_3 care verifică simultan relațiile:

1) $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.
2) $z_1 \cdot (z_2 - z_3)^2 + z_2 \cdot (z_3 - z_1)^2 + z_3 \cdot (z_1 - z_2)^2 = 0$.

Să se arate că $z_1 = z_2 = z_3$.

Prof. Marian Cucoaneș, Mărășești
Revista „Țițeica”

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează de la 0 puncte la 7 puncte.*

Succes!

Concursul Interjudeţean de Matematică

„Ion Ciolac”

Ediţia a XVI-a, 3 aprilie 2016

ISTORIE, EDUCATIE, PERFORMANTA

Soluţii şi barem de corectare clasa a X-a

Problema 1

a)
Inducție matematică……………………………………………………………………………………**2p**
b)
Din a) rezultă $(x_n-3)(x_n-4)\leq 0 \Leftrightarrow x_n^2 \leq 7\cdot x_n-12, \forall n \in \mathbb{N}^*$…………**2p**
$\log_{x_1}(7x_2-12)+\log_{x_2}(7x_3-12)+\cdots+\log_{x_n}(7x_1-12) \geq 2\left(\log_{x_1}x_2+\log_{x_2}x_3+\cdots++\log_{x_n}x_1\right)$…,,,….**1p**
Din inegalitatea mediilor, $\log_{x_1}x_2+\log_{x_2}x_3+\cdots++\log_{x_n}x_1 \geq n$ ……………**1,5p**
Finalizare……………………………………………………………………………………**0,5p**

Problema 2

Condiții de existență: $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(k\pi, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$……………………………………**0,5p**
Notăm $tgx=t$. Ecuația devine $t^2\ln t+(t-1)\ln(t^2+1)=0$…………………………… **2p**
Observăm că $t=1$ verifică relația…………………………………………………………**1p**
Pentru $t<1$ avem $t^2\ln t+(t-1)\ln(t^2+1)<0$……………………………………**1p**
Pentru $t>1$ avem $t^2\ln t+(t-1)\ln(t^2+1)>0$……………………………………**1p**
Din $tgx=1$ mulțimea soluțiilor este $\left\{\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$……………………………**1,5p**

Problema 3

Notăm $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r\in(0,\infty)$ (1)
Relația 2) se scrie succesiv $(z_1+z_2+z_3)\cdot(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=9z_1z_2z_3$, ………………**2p**
$(z_1+z_2+z_3)\cdot\left(\frac{r^2}{z_1}+\frac{r^2}{z_2}+\frac{r^2}{z_3}\right)=9r^2$, ………………………………………**1p**
$(z_1+z_2+z_3)\overline{(z_1+z_2+z_3)}=9r^2$,… ……………………………………**1p**
$|z_1+z_2+z_3|^2=(3r)^2=(|z_1|+|z_2|+|z_3|)^2$ ………………………………… **1p**
Prin urmare $|z_1+z_2+z_3|=|z_1|+|z_2|+|z_3|$, deci $arg(z_1)=arg(z_2)=arg(z_3)$ (2) ……………**1p**
Din relațiile (1) și (2) rezultă $z_1=z_2=z_3$…………………………………………**1p**